b^5	b^4	b^3	b^2	b^1	b^0	base
32	16	8	4	2	1	2
						X
						=

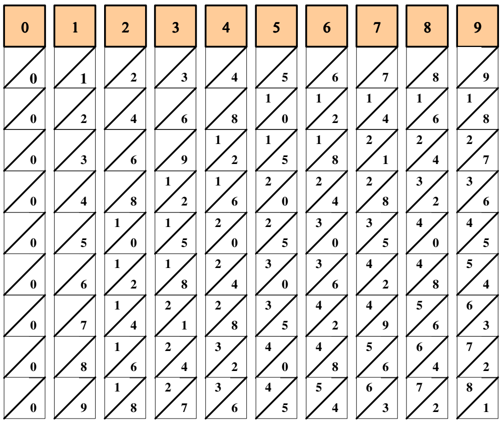
Solução: $\_\_\_\__2$ = $\_\_\_\_$ na base 10.

→ Dígitos nesta Base: 0, 1.

-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
-3	-2	-1	0	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10

Coleção: Jogos Para o Pensamento Lógico-Matemático

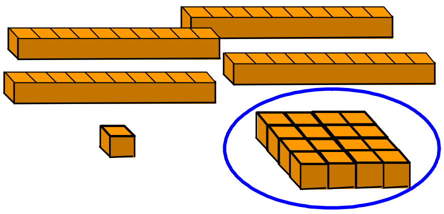
Volume 2 de 4 – PARTE A – JOGOS de #01 a #20

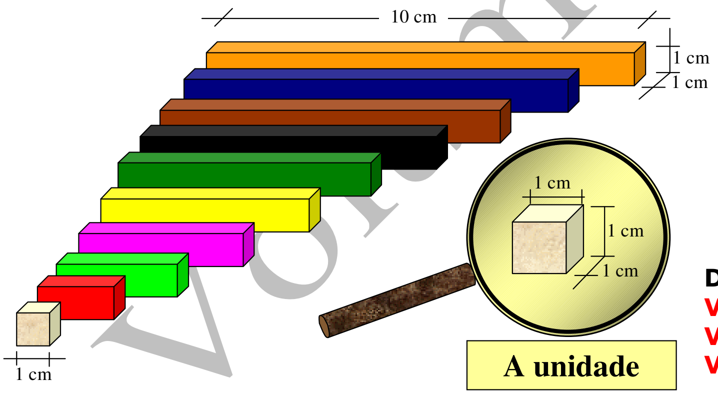


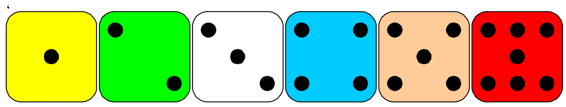
60 Jogos Para o Pensamento Aritmético

Aury de Sá Leite

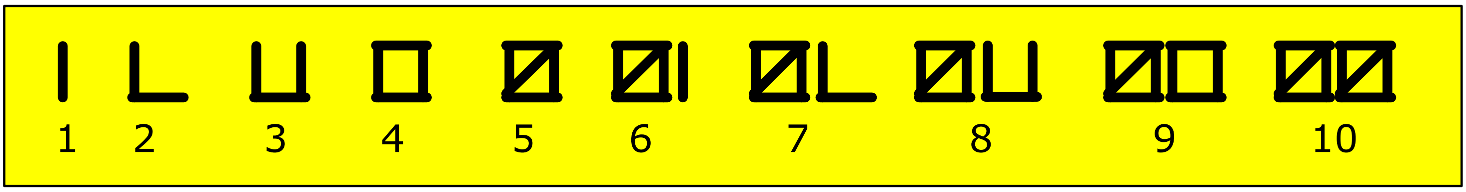
Edição Preliminar







Desta Mesma Coleção:
Volume 1: 40 Jogos Para o Pensamento Lógico;
Volume 3: 40 Jogos Para o Pensamento Geométricos;
Volume 4: 40 Jogos Para o Pensamento Algébrico.



➔ **e-mails para o autor:** aury.leite1@ig.com.br

Sobre as Licenças Creative Commons

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

As **licenças Creative Commons** são várias licenças de copyright , publicadas primeiramente em 16 de dezembro de 2002 pelo Creative Commons, uma organização sem fins lucrativos fundada em 2001. Várias dessas licenças, notadamente todas as licenças originais, garantem certos "direitos básicos", como o direito de distribuir obras com direitos autorais sem modificações, a custo zero. Algumas das licenças mais recentes não garantem tais direitos. As licenças Creative Commons estão disponíveis atualmente em 43 diferentes jurisdições pelo mundo, com mais de dezenove outras sob desenvolvimento. Licenças para jurisdições fora dos Estados Unidos estão sob a tutela da Creative Commons International.

Licenças originais

Todo o conjunto original de licenças garante os "direitos básicos". Os detalhes de cada licença depende da versão, e compreende uma seleção de quatro condições:

- **Atribuição** (BY): Os licenciados têm o direito de copiar, distribuir, exibir e executar a obra e fazer trabalhos derivados dela, conquanto que dêem créditos devidos ao autor ou licenciador, na maneira especificada por estes.
- **Uso Não comercial** (NC): Os licenciados podem copiar, distribuir, exibir e executar a obra e fazer trabalhos derivados dela, desde que sejam para fins não-comerciais.
- **Não a obras derivadas** (ND): Os licenciados podem copiar, distribuir, exibir e executar apenas cópias exatas da obra, não podendo criar derivações da mesma.
- **Compartilhamento pela mesma licença** (SA): Os licenciados devem distribuir obras derivadas somente sob uma licença idêntica à que governa a obra original.

Combinações

Há dezesseis combinações possíveis, das quais onze são licenças válidas do CC e cinco não são. Das cinco inválidas, quatro incluem ao mesmo tempo as cláusulas "nd" e "sa", que são mutuamente exclusivas; e uma não inclui nenhuma das cláusulas. Das onze combinações válidas, as cinco que não têm a cláusula "by" foram removidas, já que 98% dos licenciadores pediam Atribuição. No entanto, elas permanecem no website para referência. Sendo assim, restam seis licenças de uso regular:

1. Somente atribuição (BY)
2. Atribuição + Uso não comercial (BY-NC)
3. Atribuição + Não a obras derivadas (BY-ND)
4. Atribuição + Compartilhamento pela mesma licença (BY-SA)
5. Atribuição + Uso não comercial + Não a obras derivadas (BY-NC-ND)
6. Atribuição + Uso não comercial + Compartilhamento pela mesma licença (BY-NC-SA)

Como exemplo, a licença de Atribuição do Creative Commons (BY) permite compartilhamento e reelaboração (derivativos), mesmo para uso comercial, desde que seja dada a atribuição.

"Para a criatura de educação média de hoje, o ponto de partida óbvio da matemática seria a seqüência de números 1, 2, 3, 4, ... etc. Provavelmente apenas pessoas dotadas de algum conhecimento matemático pensariam em começar esta seqüência com o 0 e não com o 1. [...] *Quanto ao zero, ele constitui acréscimo assaz recente; os gregos e os romanos não dispunham de tal dígito."*

Bertrand Russel
*"**Introdução à Filosofia da Matemática**",*
Editora Zahar, Rio de Janeiro, 1963.

PREFÁCIO

Esta coleção, denominada "Jogos Para o Pensamento Lógico-Matemático", é composta por quatro volumes que abrangem quatro das áreas básicas da Matemática Elementar: o primeiro volume é intitulado "40 Jogos Para o Pensamento Lógico"; este, o segundo volume é intitulado "60 Jogos Para o Pensamento Aritmético"; o terceiro, "40 Jogos Para o Pensamento Geométrico" e, finalmente o quarto destes livros, é denominado "40 Jogos Para o Pensamento Algébrico". Todos eles estarão sempre associados à idéia bastante específica dos 'Jogos Para o Pensamento', cujo conceito será amplamente estudado, a seguir, no Capítulo 'Zero', denominado 'Prolegômenos'.

Esta coleção de livros de Matemática denominada *"Jogos Para o Pensamento Lógico-Matemático"* foi planejada para ter quatro volumes que abarcassem aspectos da Lógica, da Aritmética, da Geometria e da Álgebra, na forma de *Jogos Para o Pensamento*.

Denominado "*60 Jogos Para o Pensamento Aritmético*", este é o segundo dos quatro volumes da série. Este volume prima por introduzir idéias práticas e teóricas sobre a criação, a geração e o uso de *idéias e jogos* envolvendo o *Pensamento Lógico-Matemático no que diz respeito à Aritmética*.

Como foi afirmado no primeiro volume desta coleção este não é um livro didático. Assim como os demais livros desta coleção, eles podem ser utilizados com vantagem nas escolas, mas eles não foram escritos para ser tão somente utilizado desta maneira. Eles poderão ser utilizados por todos aqueles que estejam interessados em jogar e aprender a raciocinar logicamente, ampliando este raciocínio para abranger também outros conhecimentos e raciocínios matemáticos. Em outras palavras, estes livros podem ser utilizados:

- Pelos pais e seus filhos pequenos – num processo interativo de aprendizagem e de autoconhecimento muito rico para ambos;
- Por grupos de amigos ou colegas – em jogos coletivos que acabarão por provocar tertúlias[1] bastante positivas e disputas intelectuais interessantes;

[1] De acordo com o Dicionário Houaiss: do espanhol tertulia significa 'reunião de gente para discutir ou conversar', do italiano trastullo, 'jogo, divertimento, passatempo'.

- Por professores com seus alunos em momentos de aprendizagem prazerosa porque significativa que certamente envolverá desafiadores e instigantes debates intelectuais;
- Por os estudantes das escolas de Ensino Fundamental que funcionam em período de 8 horas de aulas e atividades;
- Por freqüentadores das *Escolas da Família* ou *Escolas Abertas* – escolas que funcionam aos sábados e domingos – reunindo crianças e pais residentes numa dada comunidade;
- Por educadores ou pedagogos durante processos de treinamento, capacitação, atualização ou sensibilização docente;
- Por grupos da *melhor idade* com a finalidade de aumentar a interação social;
- Por indicação de terapeutas, quando for o caso ou quando julgado conveniente por eles, sem maiores intenções do que o de proporcionar momentos de lazer e reflexão, para seus pacientes, sejam crianças, jovens, adultos ou pessoas da terceira idade.

São quatro livros para serem lidos e relidos, pois a cada página, eles apresentam um novo jogo, *com regras que podem ser modificadas ou até mesmo reinventadas pelos leitores* na medida em que forem compreendendo o que seja o processo de *'aprender a aprender'* e o de *'aprender através de Jogos para o Pensamento'*.

Os textos destes livros foram escrito com o propósito de provocar discussões intelectualmente criativas, seja através de *leituras cooperativas* (grupos de crianças e adolescentes ou adultos) interagindo com os mesmos objetivos – ler e interpretar os textos e desenhos –, seja para aprender a jogar, jogar e/ou a modificar e adaptar as regras dos jogos ou seja através de *reuniões colaborativas* em que, aqueles que sabem ensinam aos que não sabem (os que sabem ler e interpretar ensinam aqueles que não sabem ler ou não conseguem interpretar as regras dos jogos).

Há que se realçar ainda que, cada um destes quatro livros foi escrito para ser retomado a cada fase da vida, em momentos de lazer, de reflexão, de introspecção, de descoberta ou redescoberta sobre as formas de pensar e raciocinar.

O material concreto fartamente colorido que acompanha cada um dos jogos: cartões, fichas, etiquetas e pequenos tabuleiros, podem ser impressos facilmente a partir dos arquivos contidos nos CD-R que acompanham cada um destes quatro livros, via impressora jato de tinta ou laser colorida, para serem em seguida plastificados e recortados. Isto facilitará a reposição de peças em face de desgaste ou perda.

Deve-se realçar ainda que a maior das qualidades do material concreto encontrado nos quatro volumes é o seu baixo custo quando comparado aos materiais educativos concretos industrializados e aos materiais concretos virtuais (softwares educacionais).

Gostaria de receber críticas, bem como sugestões de novos jogos e de novos materiais, justamente aqueles criados por você.

Um grande abraço,

Aury de Sá Leite
Professor Assistente Doutor
UNESP- Guaratinguetá/SP – de 1988 a 2008
e-mails para o autor: aury.leite1@ig.com.br

SUMÁRIO

PROLEGÔMENOS

A Criação de Oportunidades de Aprendizagem em Aritmética

Nestes Prolegômenos[2] o leitor encontrará os princípios norteadores desse nosso livro na área da Educação Matemática. Os 'Materiais Concretos Psicopedagógicos' que serão apresentados neste segundo volume da série "Jogos Para o Pensamento Lógico-Matemático" ("60 Jogos Para o Pensamento Aritmético") são, como foram os 'Micromundos Educativos', estudados e largamente utilizados no primeiro volume desta série ("40 Jogos para o Pensamento Lógico"), novos tipos bastante originais de 'Objetos Oportunizadores de Aprendizagem' de fácil confecção, além de serem de baixo custo e de fácil reposição em caso de perdas ou desgaste. Este volume está dividido em três partes: Parte A (esta), Parte B e Parte C, como 20 Jogos Para o Pensamento Aritmético cada.

0.1.- Sobre a Psicopedagogia

O verbete *Psicopedagogia*, que consta do Dicionário Houaiss, como: "*ciência aplicada que consiste em aliar a psicologia, especialmente a experimental, à pedagogia*". A etimologia desta palavra: psic(o)- + pedagogia", não nos permite a apreensão do exato significado desta área científica em face do seu atual progresso e abrangência.

O que ocorre é que a nova palavra tem um significado amplo que ultrapassa, em muito, aquele das partes que a constituem. Isto ocorre porque a Psicopedagogia, ciência nascida no final do século XIX, busca apoio e soluções nas mais diversas áreas do conhecimento humano, como por exemplo: a Psicologia Educacional, a Lingüística, a Ciência da Cognição, e por outro lado serve de embasamento e, muitas vezes, acaba por se apoiar nos resultados obtidos em outras áreas ligadas à cognição e aprendizagem humanas, tais como: a Didática, a Informática Educativa, os Jogos Pedagógicos, a Comunicação Midiática, e isto, somente para citar alguns poucos exemplos.

Como se verá mais à frente, Maria Montessori já utilizava as palavras 'Psicoaritmética' e 'Psicogeometria' para se referir aos mais dos 4.000 materiais concretos criados por ela, destinados à

---

[2] Prolegômenos (do dicionário Houaiss) substantivo masculino plural: *amplo texto introdutório que contém as noções preliminares necessárias à compreensão de um livro; introdução, prefácio; noções ou princípios básicos para o estudo de um assunto qualquer; princípios, elementos.*

visualização, concretização, comprovação, simulação ou operacionalização de conceitos e fatos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria.

0.2.- Sobre a Criação de Oportunidades de Aprendizagem

Há muitos objetos e artefatos que podem ser levados para as salas de aula e que ao serem manipulados pelos estudantes, ensejam oportunidades riquíssimas de aprendizagem. Os *micromundos educativos* são sem dúvida alguma os mais completos destes objetos de aprendizagem.

Como se viu nos Prolegômenos do volume anterior desta coleção, intitulado "*40 Jogos Para O Pensamento Lógico*", os micromundos são ambientes interativos, concretos ou virtuais:

- *Que encorajam os estudantes a aprender através do estabelecimento de hipóteses que podem ser testadas e comprovadas com os recursos próprios existentes nestes ambientes;*
- *Que permitem o estabelecimento estratégias ou heurísticas que levam à elaboração de regras de ação.*
- *Que possuem características tais como fechamento, completude e/ou estabilidade linguística, gráfica e até mesmo genética.*

No entanto há outros objetos e artefatos de aprendizagem que não possuindo qualidades lógicas tão férteis como os micromundos, se prestam a aprendizagens a partir de manipulações dirigidas, através das possibilidades específicas (ou locais) de simular, concretizar ou comprovar fatos, propriedades, e realizar de forma exemplar operações aritméticas.

Enquanto nos micromundos o conhecimento é construído através de tentativas e erros baseados na formulação de hipóteses, nestes artefatos que denominaremos *material concreto psicopedagógico,* o conhecimento que ainda não foi completamente assimilado, poderá ser, pelo estudante, experienciado concretamente, comprovado, simulado ou operacionalizado, visando dar a este indivíduo uma possibilidade concreta de ratificar – confirmar autenticamente – o conhecimento recém adquirido.

O que buscaremos no texto deste livro é estudar vários destes objetos e artefatos que denominamos *materiais concretos psicopedagógicos*, propondo recriá-los e transformá-los em *artefatos de baixo custo* que oportunizem aprendizagens significativas no campo da Aritmética. Nos próximos volumes isto será feito também com relação à Geometria e a Álgebra.

0.2.1.- Os Materiais Psicopedagógicos Destinados à Auto-aprendizagem

Entende-se aqui, que os materiais psicopedagógicos destinados à aprendizagem ou à auto-aprendizagem devam ser:

- *Conjuntos de objetos ou artefatos nos quais fatos conceituais notáveis, estejam presentes propositalmente, de forma facilmente visível, latente, ou mesmo, subjacente;*
- *Destinados à ratificação, comprovação ou fixação da aprendizagem de conceitos e/ou conteúdos que fazem parte dos currículos escolares.*
- *Materiais, que ao serem manipulados, explorados e/ou estudados, sem interferência dos educadores – auto-aprendizagem –, permitem a visualização, a comprovação, simulação ou operacionalização, de conhecimentos ainda não totalmente compreendidos e/ou assimilados pelos estudantes.*

0.3.- Sobre os Materiais Concretos e a Aprendizagem

Uma das questões a ser estudadas por nós diz respeito à forma de se utilizar estes tipos de artefatos: como *materiais concretos <u>verificadores</u> da aprendizagem ou então como materiais concretos <u>oportunizadores</u> de aprendizagem:*

- *Verificação de Aprendizagens, de acordo com Jean Piaget:* utilizá-los para descobrir como as crianças aprendem;
- *Oportunização de concretização de aprendizagens, de acordo com Maria Montessori e Émile-Georges Cuisenaire:* proporcionar oportunidade de melhor compreensão de conceitos recém-aprendidos, concretizando-os com a finalidade de melhor assimilação e fixação;
- *Oportunização de explorações autônomas visando aprendizagens, de acordo com Seymour Papert e Caleb Gategno:* fazer com que as crianças aprendam algo novo ao utilizar estes materiais através de manipulação, montando e/ou jogando com os mesmos.

Nestas três formas de utilização de materiais concretos, matérias estes que poderiam ser denominados de forma genérica: materiais psicopedagógicos, sejam eles micromundos educativos ou os materiais concretos educativos ou educacionais em geral, há diferenças sutis que serão discutidas nos itens a seguir.

0.3.1.- A Verificação da Aprendizagem segundo Jean Piaget

Piaget não era um pedagogo, mas sim um psicólogo, como ele costumava a afirmar. Ele estava interessado em estudar e compreender a fundo os processos de aprendizagem humana, ou seja, descobrir cada um dos passos que levam uma criança à aprendizagem de diversos conceitos até bastantes abstratos. Para isto, ele realiza entrevistas, onde os diálogos com crianças deveriam acontecer

enquanto a criança tentava resolver um problema sugerido por ele através da manipulação de objetos e artefatos que possuíam algum tipo de estrutura lógica.

A título de curiosidade, a seguir apresentaremos dois destes testes, conhecidos como testes piagetianos, acreditando que os educadores muito se beneficiarão deste conhecimento, em especial, se construírem o material e o aplicarem em crianças de diferentes faixas etárias colhendo informações e experiências através de diálogos inesperados, de respostas não pertinentes que podem revelar muito mais que as respostas pertinentes, sobre a compreensão, as formas destas crianças pensarem e sobre como a aprendizagem se dá.

Ao recriarem os materiais utilizados por Piaget e aplicarem alguns destes testes em seus filhos, sobrinhos, netos ou alunos, segundo o que será definido a seguir como *Entrevista Crítica Piagetiana*, o educador irá penetrar numa dimensão muito especial, a da psicopedagogia, o que poderá levá-lo a uma melhor compreensão do que deva ser o seu trabalho como educador.

0.3.1.1.- Sobre o Método Clínico ou Método Crítico Piagetiano

Os exames das formas de pensamento de crianças, através de verbalização, ancorados na manipulação de objetos ou artefatos concretos foi tido por Piaget como um excelente método para se avaliar qualitativamente algumas formas de aprendizagem, ou ainda, avaliar o conhecimento que tenha sido adquirido em processos de aprendizagem anteriores àquela entrevista.

Conforme relatado pelo próprio Piaget, o "método clínico" envolvia a "entrevista clínica": "que tínhamos primitivamente pedido emprestada aos psiquiatras". Este método foi substituído mais tarde pelo método denominado "crítico" que acrescentava à elaboração de hipóteses lógicas e de conversação pura e simples, a utilização de materiais concretos (objetos e artefatos) que, apresentando algum tipo de estrutura lógica, deveriam poder ser manipulados pelos indivíduos entrevistados, durante aquelas entrevistas.

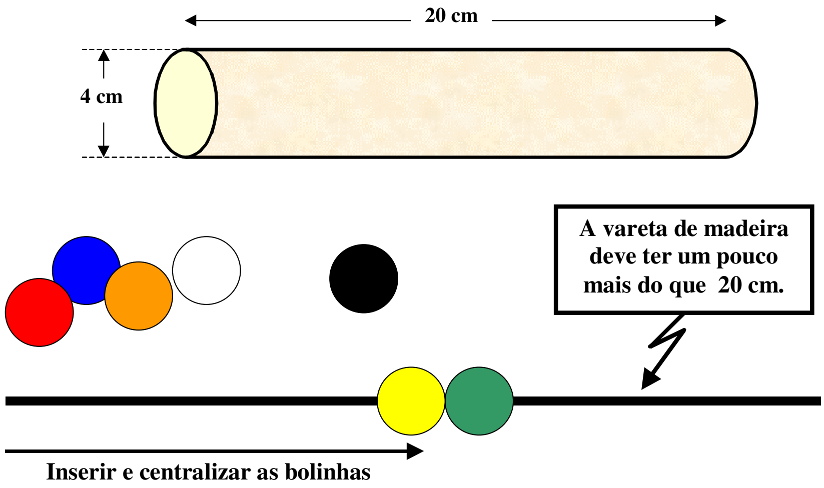
O que caracteriza a entrevista crítica piagetiana é basicamente o seguinte: o avaliador deve ficar atento às respostas "não-pertinentes", devendo estabelecer hipóteses, confirmar ou não as hipóteses, refazer as hipóteses não confirmadas ou inconvenientes e, utilizando-se da contra-sugestão, tentar confirmar ou validar o raciocínio do entrevistado.

Outra característica a ser considerada nas entrevistas piagetianas, era que Piaget, se baseava nas entrevistas feitas com diversas crianças, de forma exaustivamente comparativa, para corroborar suas hipóteses acerca de como se realizava a aprendizagem. Apesar de todos estes cuidados, muitas críticas foram feitas ao método por redundar em relatórios de entrevistas baseados em hipóteses formuladas pelo experimentador, o que acabaria por impregnar, mesmo que involuntariamente, a abrangência e a

completude das hipóteses bem como o sentido das conclusões. Mas isto não pode ser um argumento para invalidar o trabalho deste brilhante filósofo e psicólogo já que a as concepções de Piaget sobre o desenvolvimento humano vêm se confirmando através do tempo, mesmo quando submetidas a testes científicos rigorosamente controlados.

0.3.1.2.- Um exemplo de Utilização de Material Concreto Piagetiano

Um teste piagetiano, bastante interessante, a ser proposto para crianças pequenas, com idade entre três e sete anos, que é muito interessante, mas pouco conhecido dos educadores, é o seguinte: tome um tubo de plástico não transparente ou canudo cilíndrico de papelão com aproximadamente 20 cm de comprimento e com 4 cm de diâmetro (como aqueles tubos de papelão que vêm dentro dos rolos de papel para cozinha, por exemplo). Tome, no mínimo, cinco bolinhas de isopor de diâmetro inferior a 4 cm (elas devem passar folgadamente por dentro do tubo) mantenha uma delas com a sua própria cor (branca) e pinte as demais com cores distintas (por exemplo: vermelho, verde, azul, amarelo, cor-de-rosa, preto, cinza). Tome uma vareta de madeira sem pontas (se houver ponta de um dos lados da vareta a criança perceberá a direção em que a vareta está sendo inserida no tubo e isto não pode acontecer), medindo pelo menos 23 cm (maior que o comprimento do tubo). Perfure as bolas de isopor com a vareta de forma que as perfurações passem exatamente pelo centro de cada uma delas (veja a figura a seguir). Este é o *Teste Piagetiano para Verificação do Raciocínio Probabilístico em Crianças*.



O objetivo deste material é o de mostrar ao educador como as crianças pensam e resolvem problemas que envolvem hipóteses probabilísticas. O material a ser elaborado previamente pelo educador é o seguinte:

- *Um tubo de papelão ou de plástico, não transparentes (opacos);*
- *Bolas de isopor pintadas de cores distintas e uma na cor natural;*

- *Uma vareta de madeira um pouco mais extensa que o tubo (poderá ser uma vareta de churrasco sem a ponta).*

De acordo com os dados da figura anterior, um dos problemas a ser proposto à criança consiste no seguinte:

- *Insira três bolinhas na vareta, de forma a ficarem bem centralizadas na mesma e bem próximas uma da outra. Peça à criança que aponte cada uma das bolinhas que foram inseridas na vareta, pedindo a ela que identifique as cores de cada uma. É importante verificar, antes de qualquer coisa, se a criança reconhece as cores das bolinhas e se elas conseguem distinguir qual a bolinha do centro e quais as que estão nas beiradas da bolinha central;*
- *Mostre o tubo à criança e vá introduzindo a vareta no tubo até que as bolinhas fiquem encobertas pelo tubo. Pergunte agora: qual a bolinha que vai aparecer primeiro (pelo lado direito, por exemplo) quando você empurrar a vareta. Tente com o lado esquerdo.*
- *Verifique se o problema foi resolvido por memorização ou por raciocínio: faça uma rotação de 180º (cento e oitenta graus) no canudo fazendo com que a criança acompanhe a operação. Repita as perguntas feitas no passo anterior.*
- *Use novamente três bolinhas, mudando a ordem, ou variando as cores. Repita os passos anteriores. Use quatro bolinhas ou até mesmo as cinco ou mais, se houver.*
- *Proponha outros problemas como por exemplo: usando duas (ou três) bolinhas, sem que a criança saiba quais são elas, bem separadas uma da(s) outra(s) e bem centralizadas na vareta, ela deve ser convidada a "adivinhar" qual a bolinha que sairá por uma das extremidades do canudo. Verifique se ela baseia o seu raciocínio nas bolinhas que sobraram sobre a mesa. Se ao empurrarmos a vareta uma das duas (ou das três bolinhas) se tornar visível para a criança, qual poderá ser a(s) outra(s)? Retome o problema girando o canudo várias vezes (180º, 360º, 540º etc.) repetindo as perguntas.*

0.3.1.3.- Um Teste de Discriminação Piagetiano

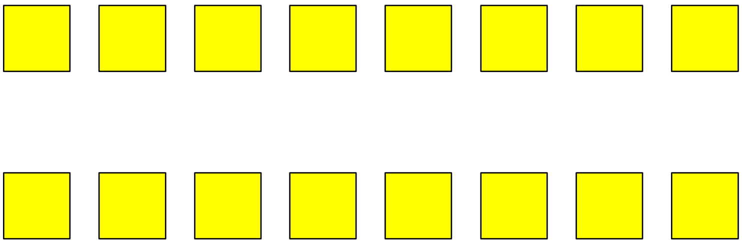
Há um importante teste Piagetiano que bem conduzido mostra que a criança que sabe contar de "um" a "dez" pode se confundir no tipo de teste a seguir apresentado.

Teste Piagetiano destinado a verificar se uma criança possui o conceito de número (quantidade)

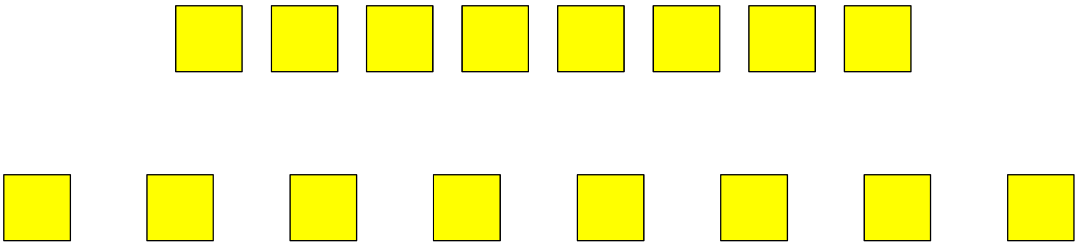
Observação: Este teste é geralmente denominado: teste de conservação da quantidade.

Objetivo deste teste: Verificar se a criança consegue estabelecer uma correspondência biunívoca entre os objetos de duas filas que possuem as mesmas quantidades de objetos iguais. Verificar se a criança domina o conceito de número.

[1] Apresente a uma criança que sabe apenas contar de "um" até "dez", sobre o tampo de uma mesa, duas filas (linhas) com oito cartões idênticos organizados como na figura a seguir, perguntado: em qual fila há mais cartões? Anote a resposta dada.

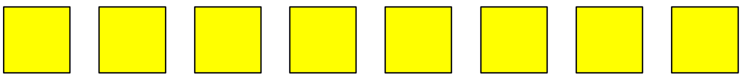


[2] Agora disponha os cartões da segunda fila de forma que haja um maior espaço entre eles e repita a pergunta: em qual das filas há mais cartões? Anote a resposta dada.



[3] Solicite à criança que conte os cartões em cada uma das filas. E repita a pergunta inicial, anotando a resposta que ela dê.

[4] Retire os cartões da segunda fila e guarde-os. Peça à criança que conte de novo os cartões da fila que restou sobre a mesa:



em seguida, cuidadosamente, apenas aumente o espaçamento entre os cartões, fazendo com que a criança possa perceber o que você está fazendo – no entanto não fale nada durante a reorganização dos cartões:

faça a pergunta: e agora, nesta fila há mais ou menos cartões? Anote a resposta.

Espantosamente, mesmo crianças que sabem contar muitíssimo bem de “um” até “dez” responderão à última pergunta afirmando: agora, há mais cartões do que antes.

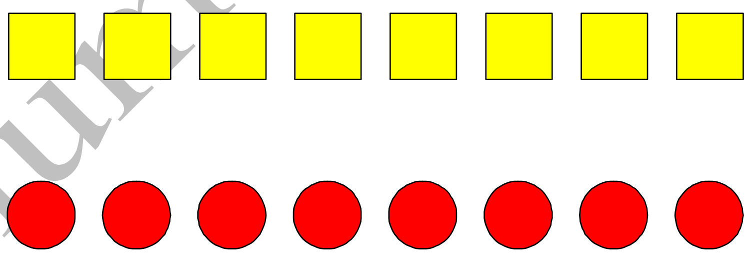
O que você pode ainda tentar, é retornar os cartões à posição anterior, pedir para que elas os conte, repetindo aquela última pergunta para, em seguida, repetir o passo [4].

Este teste depende muitíssimo da sensibilidade do aplicador e é necessário que a criança não esteja intimidada ou que aparente cansaço. A quantidade de cartões pode variar, bem como, pode-se utilizar as duas filas compostas por fichas coloridas redondas.

O que pode ser testado, ainda, mesmo com crianças que “passaram” no teste, é a mistura de cartões com fichas, verificando se ela consegue ainda, estabelecer a correspondência biunívoca entre os elementos dos dois conjuntos: cartões versus fichas. Veja o desenho ilustrativo:

Objetivo deste teste: Verificar se a criança consegue estabelecer uma correspondência biunívoca entre os objetos de duas filas que possuem as mesmas quantidades de objetos distintos. Verificar se a criança domina o conceito de número.

Se a criança “passou” pelo teste anterior tente agora os mesmos passos com estas figuras:



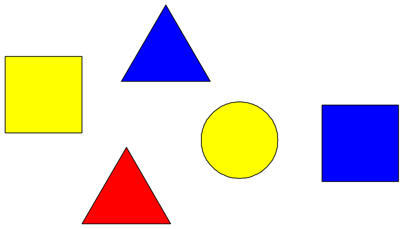
0.3.1.4.- Um Teste ao Estilo de Piaget Sugerido por Nós

O conceito de número envolve o conceito de cardinalidade, isto é, o conceito de quantidade, que difere do conceito de ordinalidade. Os cardinais são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. e referem-se a quantidades de elementos que podem fazer parte de um conjunto, enquanto os ordinais são 1º, 2º, 3º, 4º, 5º , etc. e referem-se à posição ocupada por um dado elemento numa seqüência. As crianças atingem o conceito de número cardinal somente após passarem pelo conceito de números ordinais. Vamos sugerir aqui um teste bastante interessante para verificar este fato.

0.3.1.4.1.- Um Teste sobre cardinalidade e ordinalidade

Objetivo: verificar se a criança domina o conceito de número.

[1] Distribua sobre o tampo de uma mesa 5 objetos planos (fichas ou cartões) mais ou menos do mesmo tamanho, mas distintos, dois a dois, seja pela cor ou pela forma, conforme o desenho a seguir:

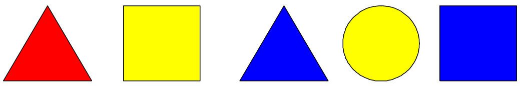


[2] Peça para que a criança os conte em voz alta. Agora pergunte a ela quem é o "cinco". Agora pergunte quantas figuras há aqui? Verifique se ela contará de novo ou responderá automaticamente "cinco".

[3] Pergunte agora: quem é o "três"? Quem é o "quatro"?

[4] Mude as peças de posição e pergunte de novo: quem é o cinco? Ela apontará a mesma figura anteriormente apontada?

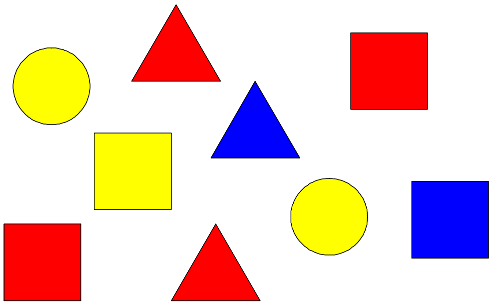
[5] Coloque os objetos em fila e peça para que ela os conte, tomando o cuidado de colocar o objeto nomeado como "cinco" exatamente no meio da fila. O que acontecerá?



[6] Acrescente mais um objeto ao conjunto, embaralhe tudo. Solicite para que ela conte de novo o conjunto de objetos em voz alta. Pergunte agora que é o "cinco".

[7] Vá acrescentando objetos ao conjunto de elementos. Tente chegar a nove objetos. Vá perguntado sobre quem é quem a cada nova contagem realizada. Verifique se, e em que momento, a criança desistirá de se referir ordinalmente a cada um dos elementos passando a enxergá-los apenas como uma quantidade, ou seja, desistirá de guardar a ordem e que foi realizada a contagem.

[8] Este teste pode ser repetido usando-se objetos nem todos distintos. Neste caso, deve-se escolher dois dos objetos que sejam exatamente iguais e perguntar qual deles é o "tal" elemento. Em seguida deve-se embaralhar os objetos sobre o tampo da mesa à vista da criança perguntando-se de novo, qual deles é o objeto "tal"?



0.4.- Sobre os Materiais Psicopedagógicos de Maria Montessori

Não se pode falar sobre 'Aprendizagem, Fixação e Transferência de Conceitos da Aritmética' sem mencionar um dos mais completos e irretocáveis métodos que se conhece de aprendizagem da aritmética. Este método de aprendizagem foi elaborado e proposto por Maria Montessori num hoje raríssimo livro denominado 'Psicoaritmética' e se caracteriza por envolver a utilização de materiais concretos manipulativos. Aqui iremos apresentar algumas idéias sobre a Aritmética segundo Maria Montessori e, por serem nitidamente inseparáveis as criaturas e a sua criadora, apresentam-se alguns dados biográficos de Maria Montessori, o que permitirá compreender a profundidade do seu trabalho, extremamente rico e criativo, além de sua genialidade

0.4.1.- A Psicoaritmética e a Psicogeometria de Maria Montessori

Maria Montessori (31/8/1870 - 6/5/1952) é reconhecida como uma das mais importantes educadoras e pesquisadora na área da Psicopedagogia. Tem ela o mérito de ter sido a primeira mulher a se graduar em medicina na Itália. Ao concluir o curso de medicina, vai trabalhar na Clínica Psiquiátrica da Universidade de Roma com crianças com necessidades especiais, onde passa a lecionar nas cadeiras de higiene e antropologia.

Em 1901, Montessori é nomeada diretora do Instituto Estadual de Ortofrenia[3] onde desenvolve intensas pesquisas sobre aprendizagem daquelas crianças. A larga experiência educacional assim adquirida irá permitir que em 1907, aos 37 anos de idade, que ela venha a fundar a primeira Casa das Crianças ("Casa dei Bambini"), uma escola para crianças normais em idade pré-escolar, onde passa a aplicar os conceitos, bem como os *recursos educacionais concretos – materiais concretos manipulativos* – desenvolvidos até ali. A partir daí, ela irá ampliar e diversificar estes materiais,

---

3 orto- do gr. orthós,ê,ón 'reto, direito, correto, normal, justo'; -frenia: do grego *phrê,, phrenós,* sufixo utilizado nos meios cultos a partir do século XIX, designando 'estado mental patológico'. Ortofrenia: ciência que visa prover recursos para a correção das perturbações intelectuais ou mentais; visa resgatar o comportamento intelectual objetivando atingir padrões considerados normais.

consolidando suas idéias e criações num método que irá ficar conhecido pelo seu nome: o *Método Montessori*.

As buscas, levadas a efeito por Maria Montessori entre 1900 e 1901, fizeram com que ela tomasse contacto com os trabalhos pouco conhecidos de dois médicos franceses: Jean-Marc-Gaspard Itard (1775-1838) e Édouard Séguin (1812-1880). Séguin foi aluno de Itard e trabalhou com as idéias do seu mestre, criando alguns dos materiais psicopedagógicos concretos que influenciaram de alguma forma o trabalho de Montessori. Assim como Montessori viria a fazer mais tarde, Séguin abriu escolas para a educação de crianças especiais na França e mais tarde nos Estados Unidos, para emigrou em 1849. Séguin de certa forma foi um precursor de Maria Montessori em termos do trabalho na educação de crianças com necessidades especiais.

Séguin utilizava materiais sensoriais em seu ensino, usando água quente e fria, o sequenciamento de pedras de tamanhos ou pesos diversos. Seguin criou uma material contendo ranhuras para o traçado das letras, bem como reguinhas para a escrita de numerais desde o 0 até o 99 (vide o material já adaptado por Montessori no JARIT#08).

Em 1909 Maria Montessori publica o seu primeiro livro, intitulado "Pedagogia Científica", que será seguido por diversas outras publicaçãoes.

0.4.2.- As Escolas 'Montessori' na Itália

Maria Montessori já era bastante conhecida na Europa – seja porque ela era uma brilhante conferencista, defensora dos direitos da mulher, seja porque seu método educacional era notável e instigante – quando, ao recusar-se a apoiar o regime fascista de Benito Mussolini, ela o vê ordenar o fechamento de todas as escolas 'Montessori' na Itália.

Resoluta, e não querendo ceder às imposições de Mussolini, ela passa a residir na Espanha, onde em 1934, publica pela Casa Editorial Araluce, de Barcelona, mais alguns de seus livros, sendo que entre eles, surgem aqueles intitulados muito apropriadamente: *Psico-Aritmética* e *Psico-Geometria (com o ifem).*

Estes livros continham, sem dúvida alguma, idéias muito originais e bastante à frente do seu tempo: eram notáveis incursões que a médica italiana fazia na área da Psicopedagogia, o que é bastante claro, não somente pelo conteúdo criativo e inovador dos livros, mas ainda pela escolha que ela fez para o subtítulo do primeiro deles: *"Psico-aritmética – A aritmética desenvolvida segundo uma experiência de vinte e cinco anos de trabalho orientado pela Psicologia Infantil"*. Já, o livro Psico-Geometria, apesar de editado na Espanha em 1934, nunca o foi na Itália. O mais curioso ainda, é que

livro Psico-Aritmética editado na Espanha em 1934, só foi editado na Itália em 1971 por Aldo Garzanti Editore com o nome de Psicoaritmética (sem o hífen que aparecia na edição espanhola).

0.4.3.- O Material Educacional Desenvolvido por Montessori

O material educacional que foi desenvolvido por Montessori se destinava ao trabalho envolvendo pequenos grupos de crianças ou, até mesmo, uma só criança, onde o educador somente pode intervir quando isto fosse estritamente necessário ou quando solicitado. Assim é que, o trabalho realizado pelas crianças, utilizando os materiais de aprendizagem, apesar de ser praticamente autônomo, permite que elas venham a assimilar muitos conceitos abstratos que, normalmente só estariam ao seu alcance sem o auxílio daqueles meios, alguns anos mais tarde. Este tipo de abordagem educacional tem se mostrando eficaz ao longo destes mais de cento anos, seja entre os mais diversos grupos culturais, seja entre os mais distintos grupos socioeconômicos.

O material Montessori prevê desde o mobiliário – cadeiras, mesinhas, cabideiros, prateleiras, – adequado às crianças, bem como e aqueles destinados à alimentação, higiene e trabalho – como pratos, talheres, copos, canecas, escova de dentes, pente, sabonete, toalha, pequenos tapetes, travesseiros, bem como folhas impressas com tarefas, cálculos e desenhos. Estudos recentes mostram que este tipo de material possui mais de 4.000 objetos e artefatos. Há muitas lojas especializadas neste tipo de materiais nos Estados Unidos e até mesmo na China.

0.4.3.1.- O Material Dourado Montessori

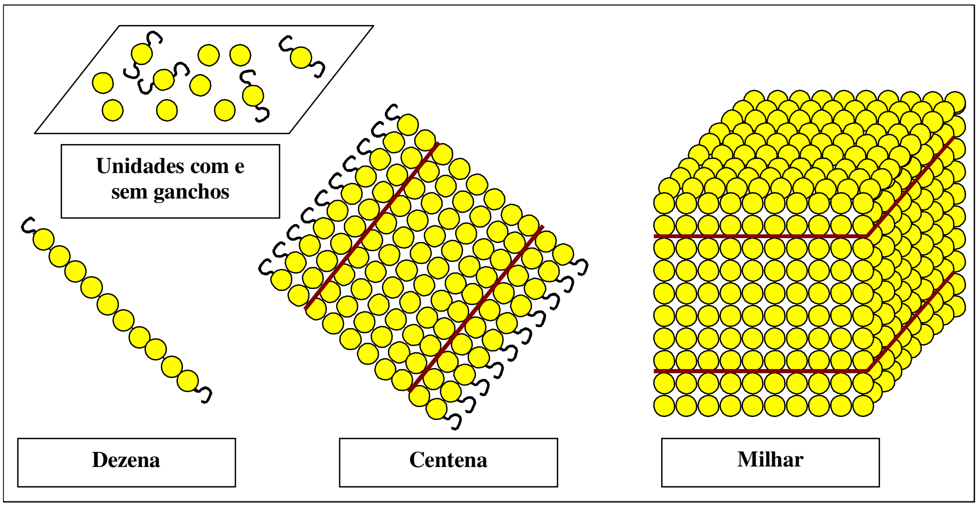
A finalidade maior do que vem a seguir é apresentação do *Material Dourado de Montessori*. Este material é encontrável em muitas escolas brasileiras, mas não é utilizado, seja porque o professor não sabe como utilizá-lo, seja porque só existe um ou dois conjuntos, quando o indicado seria um conjunto para cada 4 alunos. O Material Dourado será apresentado a seguir, dentro de uma perspectiva mais ampla do que normalmente se costuma fazer nossos educadores, ele será associando a uma gama de outros materiais que o completam e justificam plenamente a sua aplicação no ensino da Matemática.

No livro Psicoaritmética, que tenho em mãos − livro este que ganhei de presente de uma professora que fez na Itália, em 1981, um curso de especialização no Método de Maria Montessori −, há a ilustração e a descrição de uso de um material pedagógico conceitualmente muito rico denominado *Material Dourado*.

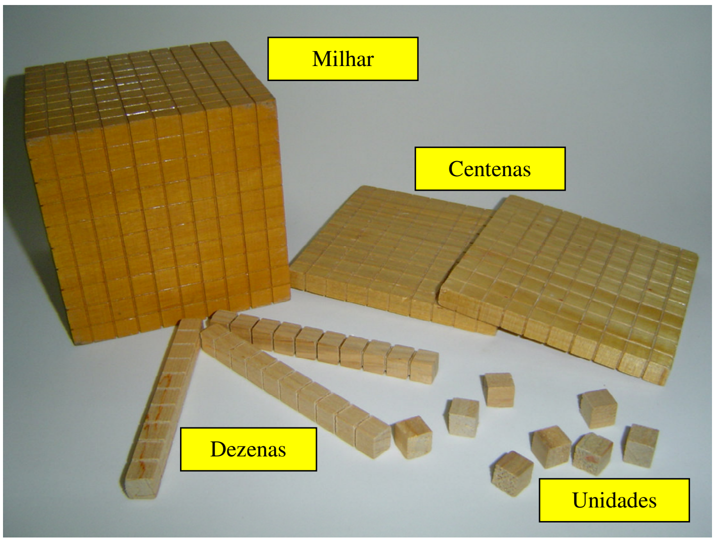
Feito com *contas perfuradas de vidro, redondas e na cor dourada – daí muito provavelmente, o nome 'Material Dourado' – e*ste material era apresentado em conjuntos conexos – as contas eram

unidas com arames, contendo as seguintes quantidades de contas (vide figura a seguir): 10 (a dezena), 100 (a centena) e 1000 (o milhar) interligados por arames flexíveis (na cor marrom na figura), mas que podiam ser reagrupados através de pequenos ganchos metálicos – formando o que Maria Montessori denominava “serpentes”.

O Material Dourado lançava mão ainda, de contas individuais que representavam as unidades, estas podendo ou não, ter ganchos.



Posteriormente, o mesmo material passou a ser apresentado de forma mais prática. Em madeira sólida: as unidades seriam constituídas de pequenos cubos de 1 cm × 1 cm × 1 cm (1 cm de aresta); as dezenas em barrinhas medindo 1 cm × 1 cm × 10 cm; as centenas, por placas medindo 1 cm × 10 cm × 10 cm e os milhares por cubos com 10 cm de aresta conforme podem ser visto na foto a seguir. No caso das dezenas e centenas, a contagem da quantidade de unidades pode ser feita facilmente pelas crianças, já no caso do cubo o professor deve se encarregar de construir este mesmo cubo com dez placas de centenas para tornar concreta para a criança, a idéia do que seja o milhar.



0.4.3.1.1.- Comentário Pertinente

Atualmente no comércio, os educadores irão encontrar o Material Dourado de Montessori em madeira e até mesmo em material emborrachado (E.V.A.), mas eles podem esconder um grave defeito: o bloco de 1000 unidades pode ser oco, ou seja, ele é um cubo cujas faces são coladas para dar a impressão de constituir-se num bloco maciço. Isto é profundamente perturbador para a criança por entrar em choque com os conceitos a serem assimilados através daquele material.

A criança percebe, e com absoluta facilidade, que ali não estão as 1000 unidades "prometidas" ou "esperadas"; as crianças percebem sem nenhum esforço e nitidamente, que faltam as unidades que deveriam estar no interior do cubo. Por isto o educador deve evitar adquirir este material que, embute um erro fatal em termos de conceituação.

0.4.4.- O Método Montessori

Maria Montessori, a grande médica e educadora italiana que se tornou mundialmente conhecida, mesmo numa época de parcas comunicações, teve uma trajetória profissional e pessoal repleta de grandes desafios e obstáculos que foram sendo vencidos, possivelmente devido à sua fibra, persistência e, sobretudo, inteligência privilegiada.

Durante toda a sua vida, e mesmo atualmente, ela e seu método educacional tiveram opositores e detratores. É fácil imaginar a dificuldades por ela enfrentadas para formar-se em medicina num país que formava apenas homens em medicina e as suas dificuldades que, ao se opor ao Regime Fascista, tendo que deixar a Itália, numa época em que seu trabalho era reconhecido mundialmente. Acrescente-se a isto que ela, corajosamente, deu á luz a um menino não reconhecido pelo pai, que foi chamado Mário, Mário Montessori.

Mesmo hoje, muitos educadores ainda imaginam que: *'o material de Montessori é destinado à instrução e ao ensino de crianças com necessidades especiais'*, preconceito este que faz com que o método dificilmente ganhe adeptos entre os educadores que ainda têm este preconceito, o que acaba se constituindo em um grande prejuízo para a educação.

O que se pode alegar é que: se por um lado, o método e o Material Montessori começou a ser criado a partir das impactantes experiências de Maria Montessori numa Clínica Psiquiátrica ligada à Universidade de Roma, por outro lado ele foi sabiamente estendido à educação de crianças normais.

Um fato a ser registrado, mas que normalmente não é confirmado na literatura, é que ela, antes de cursar medicina, teria iniciado uma licenciatura em Matemática, que possivelmente pode ter sido concluída. Sobre isto eu só posso dizer, como os italianos, "Si non é vero, é bene trovato" ("Se não é

verdade, é bem contado"), no sentido de que pode não ser verdade, mas é crível quando podemos analisar os materiais de Educação Matemática por ela criados.

0.4.4.1.- Características Notáveis do Método e dos Materiais

O Método e o Material criados por Montessori têm três invejáveis características: a extensão, a organização, a abrangência e a completude, a saber:

É extensivo a crianças de 3 a 12 anos, e portanto, pode ser aplicado desde a Pré-escola até o Ensino Fundamental, acrescentando-se que no caso específico da Matemática, há materiais instrucionais de Álgebra e Geometria – em geral desconhecido dos professores – que poderiam muitíssimo bem ser utilizados na 7ª e 8ª séries.

O Material Montessori foi muitíssimo bem organizado metodologicamente, prevendo-se que as aplicações se dêem de acordo com as seguintes faixas etárias: dos 3 aos 6; dos 6 aos 9 e dos 9 aos 12 anos. Há também fortes indicações metodológicas no sentido de que as classes abranjam crianças de várias idades num mesmo ambiente: nível infantil (crianças de 0 a 3 anos); nível pré-escolar (de 3 a 6); nível elementar 1 (de 6 a 9) e nível elementar 2 (de 9 a 12) e finalmente a escola média aonde as idades iriam de 12 a 14 anos.

É abrangente, quando se sabe que ela criou materiais instrucionais que estão distribuídas pelas mais diversas áreas do conhecimento humano e fasados com as respectivas idades das crianças: Vida Prática; Sensoriais; História; Geografia; Ciências Físicas; Botânica; Gramática, Pré-Leitura; Leitura; Escrita; Matemática (Aritmética dos números inteiros, das frações, dinheiro e tempo); Artes; Música; Geometria;

É completo, na medida em que se percebe que currículo montessoriano e o material por ela criado se completam mas, sobretudo que estão ligados às reais necessidades de auto-aprendizagem das crianças nas diversas faixas etárias aos quais se destinam. Dificilmente se encontrará uma integração tão perfeita entre materiais instrucionais ou educativos, uma metodologia tão detalhada, a partir de um currículo tão completo, como o criado e preconizado por Maria Montessori.

Em resumo, os materiais montessorianos foram especialmente projetados para permitir inicialmente a aquisição de habilidades para a vida prática, estimulando o desenvolvimento motor e o aumento do senso de observação e concentração da criança, bem como visam, sobretudo, ampliar a senso de independência com responsabilidade. Por outro lado, o método, não se descuida também da aquisição dos conhecimentos intelectuais relevantes, como aqueles ligados à linguagem, às ciências físicas e biológicas, à matemática, à história, à geografia e às artes. Cada uma destas áreas de estudo

tem *conjuntos de jogos* que as crianças livremente escolhem jogar quando sabem fazê-lo, e quando não, recorrem ao auxílio de outras crianças, ou "até" dos educadores – geralmente dois em cada sala, uma professora e uma auxiliar.

0.4.5.- Porque não se adotar o Método Montessori nas Escolas

As perguntas quase sempre feitas pelos educadores que passam a conhecer um pouco sobre o método e sobre o riquíssimo material educacional montessoriano são as seguintes:

Porquê, então este método não é tão difundido como deveria?

Porquê, não adotá-lo de uma vez?

Vamos responder por partes:

O "riquíssimo" material montessoriano tem elevado custo e é de manutenção cara quando se necessita de reposição de peças, e isto é praticamente uma constante. Envolve desde materiais dos mais simples, em tecido, papel sulfite e cartão, até materiais como metal, madeira, borracha, plástico.

O número estimado de materiais específicos a serem utilizados no Método Montessori gira em torno de 4.000. Estão incluídos aí não somente os materiais pedagógicos constituído por pelo menos 3 milhares de objetos e artefatos, mas uma quantidade enorme de folhas impressas com esquemas e orientações para realização tarefas diversas, cálculos e desenhos, bem como aqueles destinados à alimentação e higiene - pratos, talheres e copos, escova de dentes, pente, sabonete, toalha, etc., mais o mobiliário adaptado ao tamanho das crianças: mesas, cadeiras, estantes, cabideiros, prateleiras, tapetes, carpetes e travesseiro.

As salas de aula devem ser amplas o suficiente para permitir a alocação de estantes abertas que se destinam a separar as diversas áreas de estudos e seus conjuntos de materiais.

Os professores devem ser altamente especializados. A formação de educadores especialistas no Método Montessori exige um treinamento de 320 horas-aula e mais um ano de intenso estágio prático, supervisionado. Durante este estágio os educadores devem aprender a usar toda a variedade dos materiais educacionais especificamente projetados para o método, dentro de um sequenciamento rigoroso.

Modernamente, uma Escola Montessoriana *ideal* poderia ou deveria prever, entre outras coisas, a existência de:

- Uma ampla e sofisticada montagem das salas de aula com mobiliário adequado às idades das crianças e com os materiais montessorianos – em sua versão mais completa – expostos em estantes;

- Turmas que devem comportar entre 20 e 25 alunos, no máximo;
- Um educador treinado no Método Montessori e um auxiliar, para cada turma de alunos;
- Pessoal de apoio treinado para o exercício de suas funções: pedagoga, psicóloga, orientadora educacional, bibliotecária, inspetoras de alunos, merendeiras/cozinheiras, pessoal de serviços gerais;
- Uma biblioteca com bibliotecária treinada;
- Um centro de artes;
- Um centro de ciências com laboratórios: de Informática, de Física, de Química, de Biologia (Botânica, Zoologia, Fisiologia, Ecologia, Genética, etc.);
- Auditório, anfiteatro e/ou salão de festas;
- Sala de projeção e de audição musical;
- Oficina de trabalhos manuais.
- Cozinha, refeitório e cantina;
- Quadras esportivas, sendo pelo menos uma delas, coberta;
- Piscina;
- Um pátio amplo e ajardinado contendo um viveiro de mudas e uma horta;
- Estacionamento para veículos.

Infelizmente, tudo isto além de custar muito dinheiro, é geralmente classificado – no caso de escolas particulares – como um investimento de risco, exigindo dedicação e em particular, vocação para este tipo de trabalho.

Mas, se depois de tudo isto, se você deseja e pensa que pode abrir uma Escola Montessoriana, há firmas especializadas no mundo todo, mas em particular nos Estados Unidos, onde o movimento pela educação montessoriana vem ganhando adeptos que se agrupam em sociedades que visam controlar o movimento de expansão deste tipo de escola, orientando pais, professores, diretores, através da emissão de rigorosas normas de procedimento, funcionamento e de controle qualidade. Dois sites que podes ser visitados na Internet, com muitas vantagens, são os seguintes:

[1] http://www.earlychildhoodlinks.com/montessorians/equipment.htm

Nestes endereços da Internet você encontrará links para outros sites onde há catálogos de diversas firmas americanas e canadenses elaborados com esmero, apresentando um farto material fotográfico onde se poderá tomar contacto com praticamente tudo o que existe no mercado em termos de materiais instrucionais, bem como de mobiliário para a montagem de uma completa escola montessoriana;

[2] http://www.moteaco.com/

Aqui há indicações muito precisas sobre o escopo e a seqüência da programação curricular montessoriana bem como instruções bastante detalhadas sobre a utilização do material em sala de aula, enfim, um resumo metodológico bastante interessante e completo.

0.4.6.- O Material Dourado de Montessori

Muitos educadores criticam o Material Dourado de Montessori é muito específico e limitado, alegando que o mesmo não é eficiente no que diz respeito à caracterização da escrita e decomposição de numerais, bem como, quando o que se pretende, é a concretização das operações aritméticas de adição e subtração e a verificação de suas propriedades.

Como toda crítica feita ao método e aos materiais desta educadora, esta é fruto do desconhecimento, e não podendo ser classificada ainda, como um ato de desonestidade intelectual ou gerada pela preguiça de querer saber exatamente o que ocorre com relação a este material.

Se considerarmos que o Material Dourado é apenas um dos vários materiais componentes de um método educacional extensivo, muitíssimo bem organizado, extremamente abrangente e completo, será ingênuo analisar a sua eficácia ou eficiência de forma isolada, imaginando que Maria Montessori fosse uma educadora simplória, o que ela nunca foi.

O Material Dourado é apenas, e tão somente, mais um dos materiais componentes de um notável conjunto de diversos recursos didáticos que se prestam à oportunização da aprendizagem da noção de número, da escrita de numerais, bem como das operações de adição e subtração, se estendendo à multiplicação e divisão. E neste caso, se verá que o material é muito eficaz para aquilo que foi proposto.

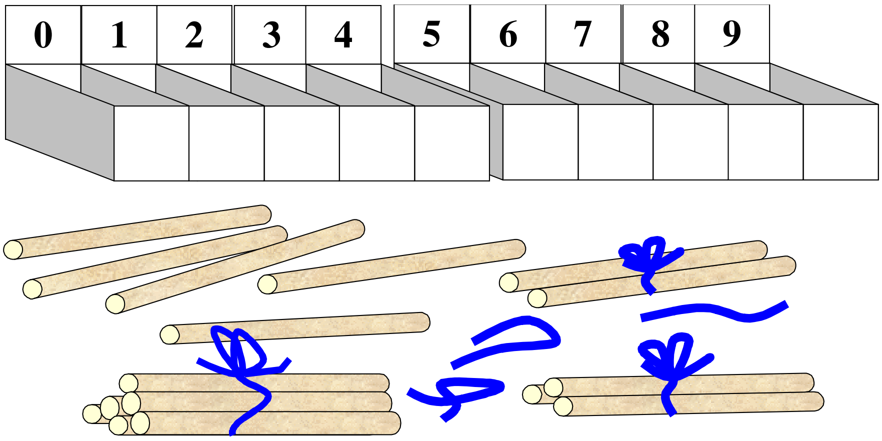
O conjunto de materiais – criados ou adaptados por Montessori aparecem em seu livro Psicoaritmética (edição italiana de 1971) – que devem ser utilizados de forma associada ao Material Dourado será mostrado através de desenhos, a seguir. Muitos deles permitem transformar a aprendizagem da noção de números, a correspondência entre os números e os numerais, a decomposição dos “grandes números”, como ela os chamava, em unidades, dezenas, centenas e milhares, as operações de adição e subtração e suas propriedades, em algo tremendamente efetivo e

bastante eficaz. Mostraremos ainda os desenhos de seus interessantes jogos de multiplicar e dividir utilizando pinos, fichas, etiquetas e pequenas contas.

0.4.7.- Os Materiais Associáveis ao Material Dourado

O Material Dourado de Montessori não é, por si só, suficiente para introduzir a criança no universo dos números inteiros, suas operações e propriedades. Outros materiais também criados por Maria Montessori devem a ele ser associados para que os resultados esperados apareçam de forma eficaz e permanente. Estes materiais serão a seguir mostrados e rapidamente descritos, logo após os desenhos, quando isto se fizer necessário.

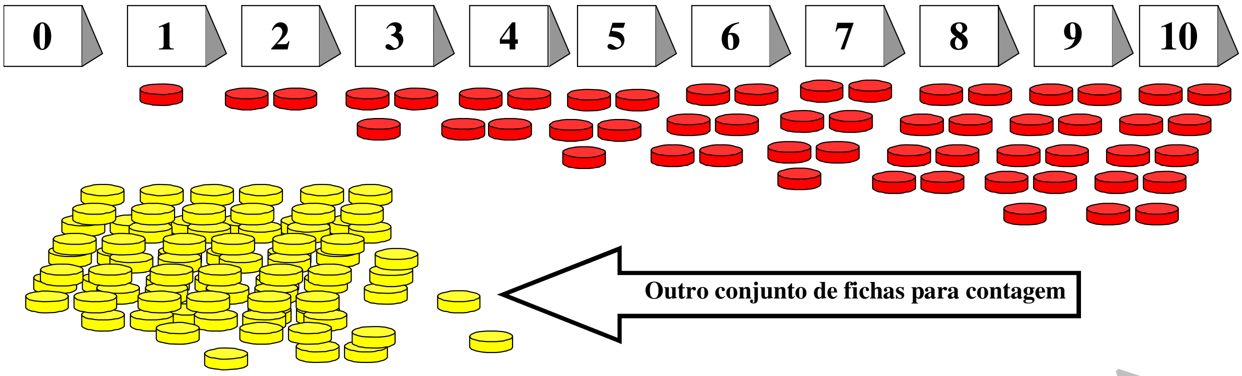
0.4.7.1.- Caixa e Bastões: contar, amarrar e armazenar



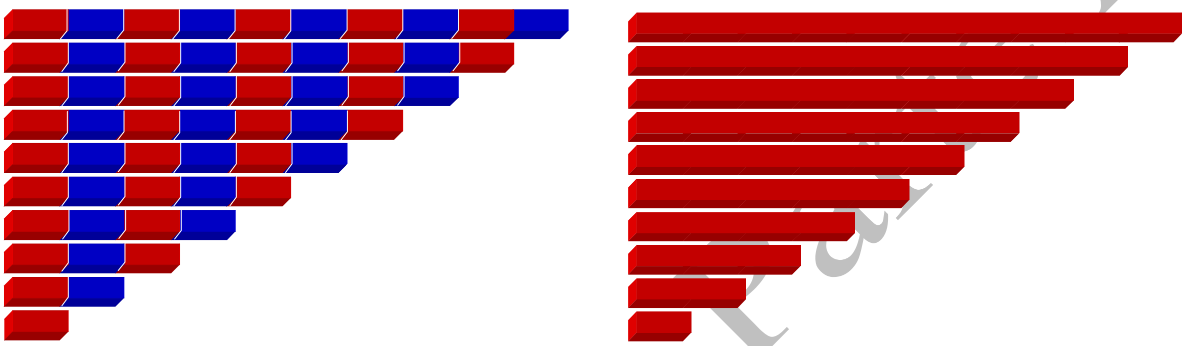
Este material é composto por dois conjuntos de caixas interligadas, onde estão afixadas etiquetas numeradas, na primeira delas, de 0 a 4 e na outra, de 5 a 9. O material ainda necessita de aproximadamente 60 varinhas de plástico ou madeira (bastões) para contagem, exatamente 8 fitas ou cadarços para amarrar os conjuntos de varinhas que irão conter: 2, 3, ..., até 9 varinhas. e caixa de correspondência números × numerais, quando a criança que já sabe contar de zero até dez estabelecerá a correspondência entre as quantidades e o símbolo que as represente.

0.4.7.2.- Fichas para contagem e Cartões Numéricos

Este é um material dos mais prosaicos entre aqueles criados por Maria Montessori. São fichas redondas coloridas para contagem e etiquetas com os numerais de 0 até 10. Normalmente, este material está disponível com conjuntos de fichas em outras cores. As etiquetas podem depois de algum tempo de prática, ser embaralhadas. A noção de paridade e imparidade é aqui realçada de forma bastante enfática pela disposição das fichas – duas a duas = aos pares.

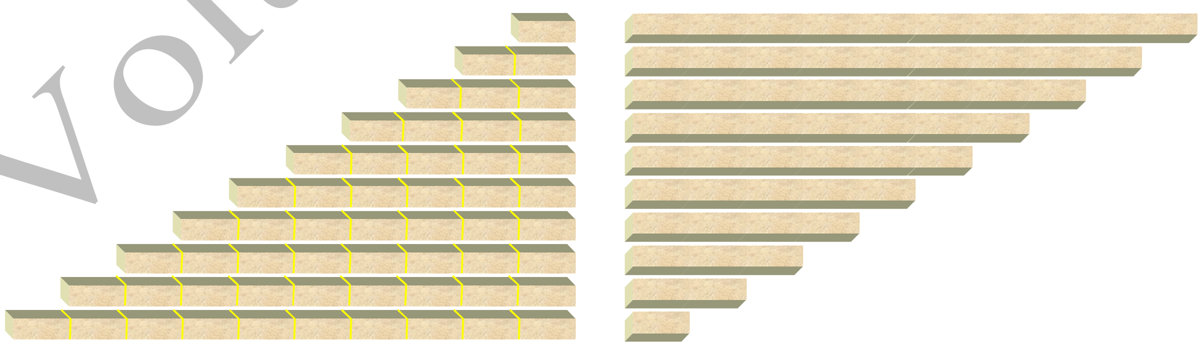


0.4.7.3.- Hastes Numéricas



Estas hastes numéricas quando para o uso no solo, geralmente estão divididas em porções coloridas (vermelhas e azuis) de 10 cm cada, sendo que a haste maior terá 1 metro. Um material de pequenas proporções (cuja haste maior terá 10 cm ou até mesmo 20 cm) também poderá ser utilizado pelas crianças, neste caso sobre o tampo das mesinhas da sala de aulas.

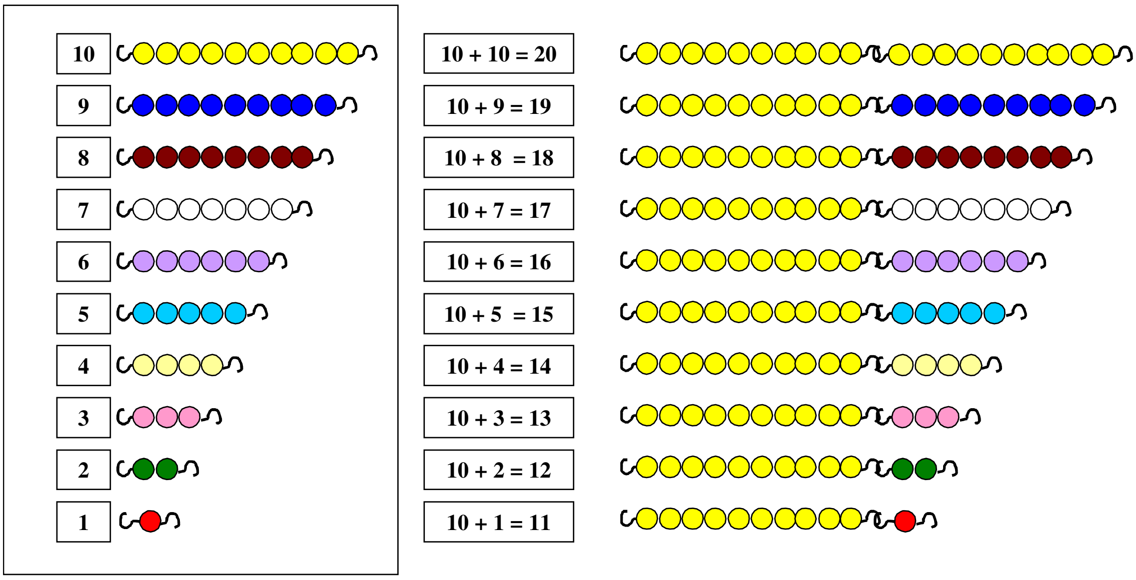
As hastes numéricas em madeira natural com divisões, bem como as hastes numéricas madeira natural sem divisões (mostradas na figura a seguir), deverão ser utilizadas pelas crianças que já aprenderam a manipular as hastes coloridas.



0.4.7.4.- Numeração de 11 a 19 e o 20

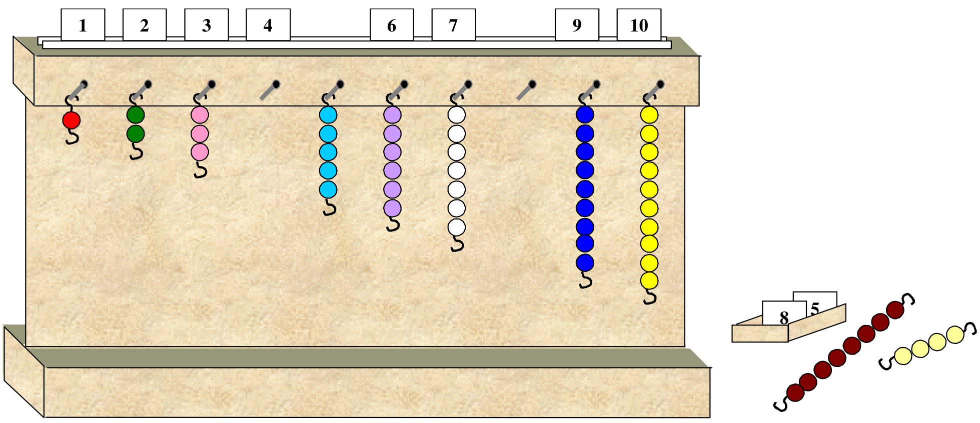
O material apresentado a seguir foi desenvolvido para ser pendurado em painéis verticais que comportam tanto as cadeias de 1 até 10 – quando se usa apenas um pino para cada uma das cadeias –,

como as “somas” de 11 até 20, quando a dezena deve ser pendurada ao lado das unidades, devendo existir para isto, dois pinos disponíveis na estrutura. É mais comum que estas estruturas comportem apenas as quantidades e números de 1 a 9 e de 10 a 19. A estrutura com dois pinos poderá ser também utilizada para a concretização ou a visualização da operação de adição usando-se como primeira parcela o 1, 2, 3, ..., até 10 combinada, indiferentemente, com 1, 2, 3, ... ou 10.

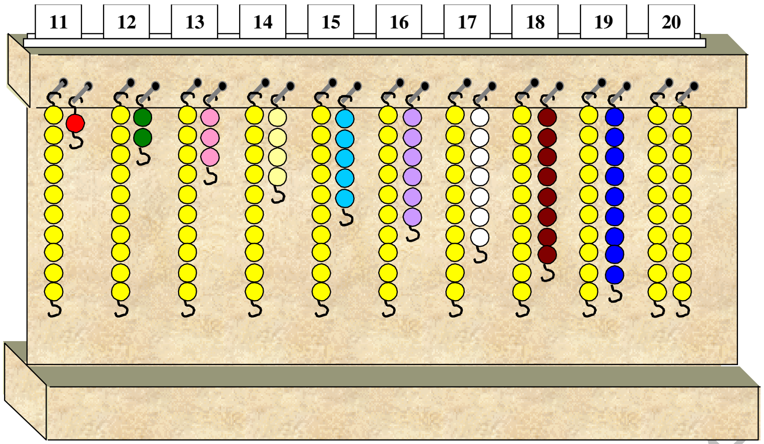


Material colorido representando os números de 1 a 10 e a identificação de números de 11 a 19 e o 20. É pertinente notar que este material pode ser substituído, com grande vantagem, seja pelo preço e seja pela maior praticidade, bem como pela versatilidade, que é bem maior, pelas Barrinhas de Cuisenaire (vide: A Aritmética Para Educadores #06).

Os cabideiros, ou seja, pequenas estruturas de madeira como aquelas mostradas a seguir, devem ser apresentadas com a finalidade de se estabelecer uma correspondência entre os numerais e as cadeias de contas ou vice versa. Os cartões contendo os númerais podem ser alocados em ordem crescente ou decrescente, bem como de forma desordenada, fazendo-se com que as cadeias de contas a eles correspondam.

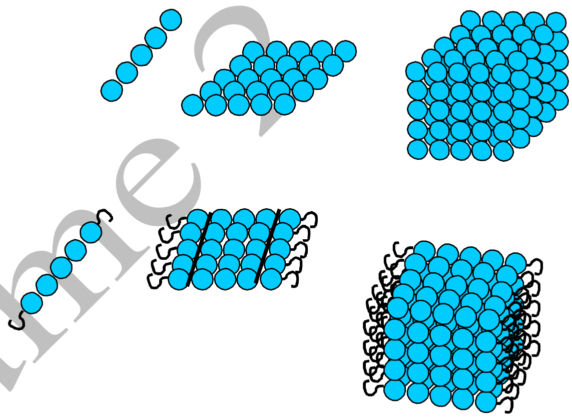


No caso de valores numéricos desde 11 até 20, os cabideiros devem apresentar-se com dois ganchos para cada número alocado no topo da estrutura.



0.4.7.5.- Representação de Números, seus Quadrados e seus Cubos

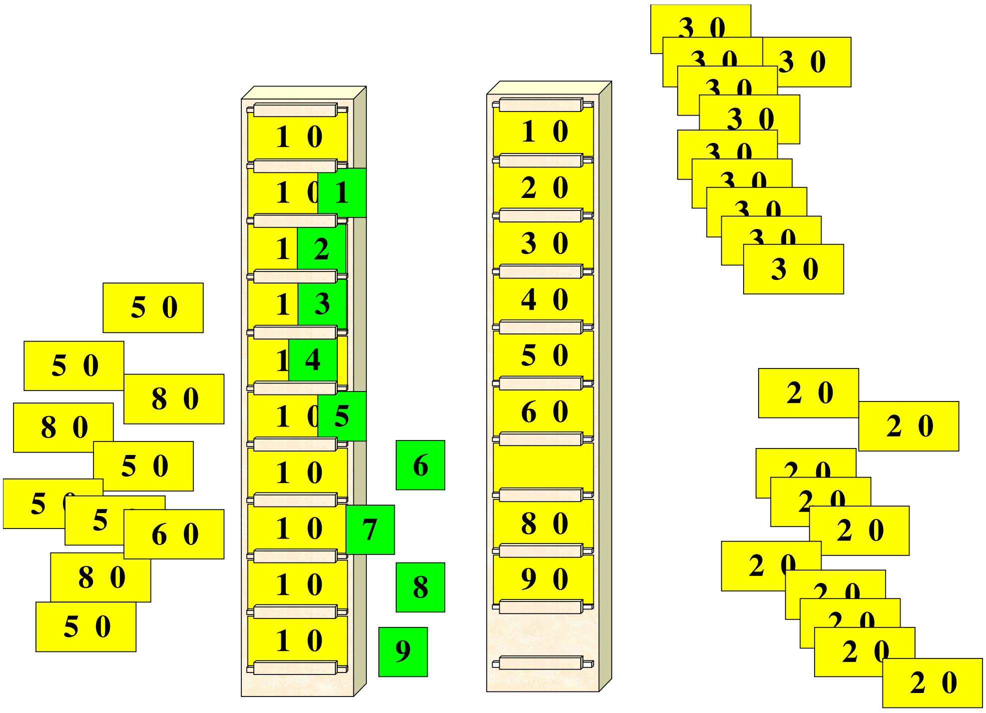
Maria Montessori criou ainda conjuntos de contas que além de representarem os números (quantidades), poderiam representar também o quadrado e o cubo deste números. Na figura a seguir mostramos a cadeia que representa o número 5 (no caso com contas azuis), a placa que representa o quadrado de 5 (5^2) e o cubo de 5 (5^3).



Note que a representação dos demais números de 1 a 10 e seus respectivos quadrados e cubos sempre será feita de acordo com as cores pré-estabelecidas e mostradas no item anterior (item 4.5.5.).

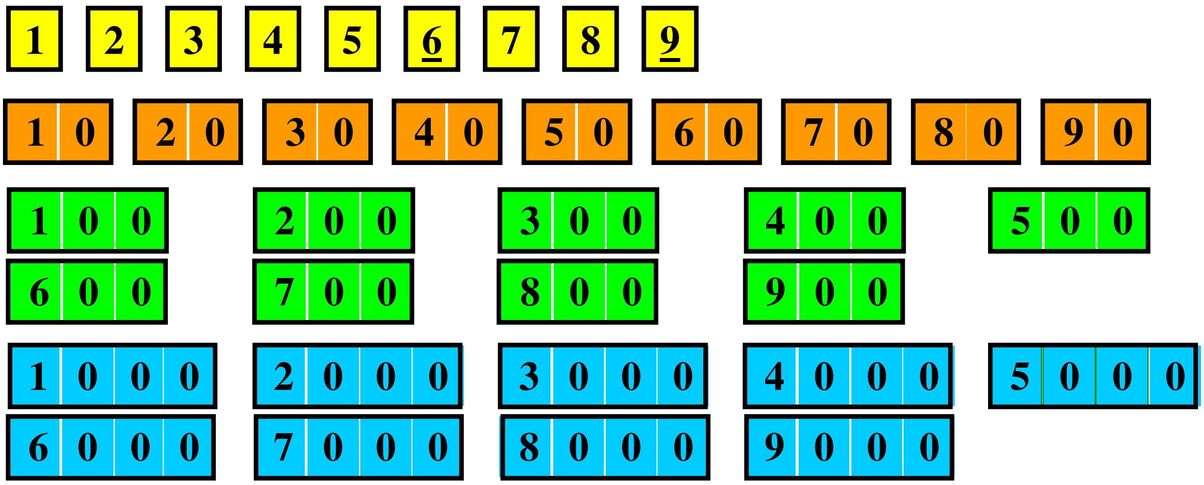
0.4.7.6.- Suporte de Madeira para fichas numéricas

O suporte de madeira para a escrita seriada de numerais de 10 até 99 ou de 10 em 10 até 90 é mostrado na figura a seguir. Veja no JARIT#08 uma alternativa moderna e bastante prática para substituir este material.



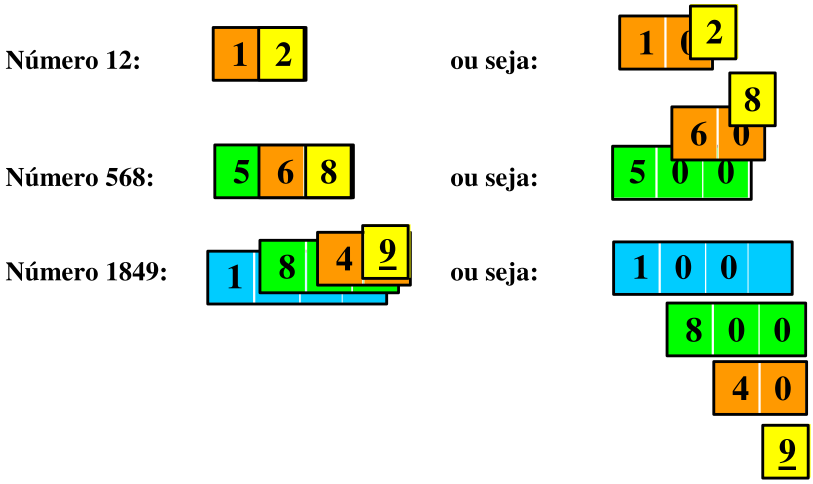
0.4.7.8.- Fichas UDCM Coloridas

A seguir apresentamos as fichas coloridas U (unidade), D (dezena), C (centena) e M (milhar) para a escrita e leitura dos ‘grandes números’ – uma designação dada por Montessori.



0.4.7.8.1.- Composição e Decomposição dos “Grandes Números“

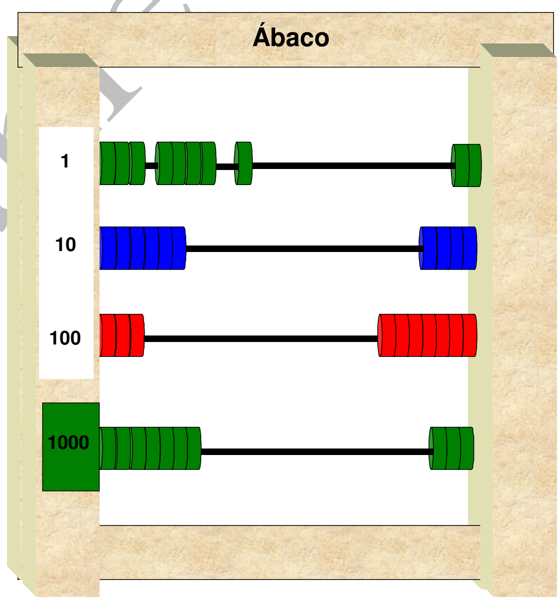
Veja a seguir três exemplos:



0.4.7.9.- Ábaco de Montessori

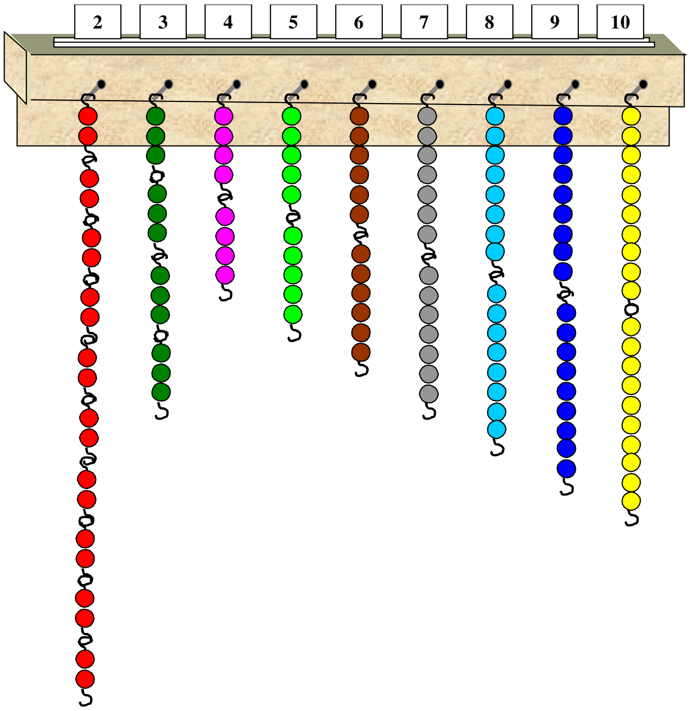
Normalmente os ábacos de plástico vendidos nas papelarias não têm a organização de cores de acordo com as cores das *Fichas UDCM* mostradas acima. No entanto, em muitos casos é possivel modificar a ordem destas cores – geralmente cores alocadas de forma aleatória e além da quantidade de cores necessárias para o nosso caso.

O ábaco a seguir, *'Ábaco dos grandes Números'* nos permitirá a contagem ou representação de quantidade até 10.999, o que nos parece suficiente, pelo menos numa primeira fase de aprendizagem da aritmética.

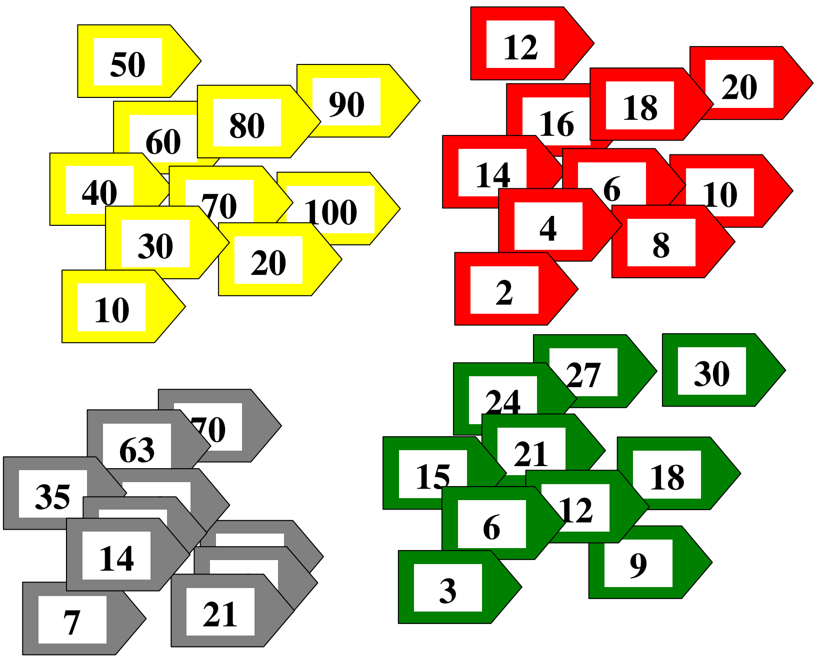


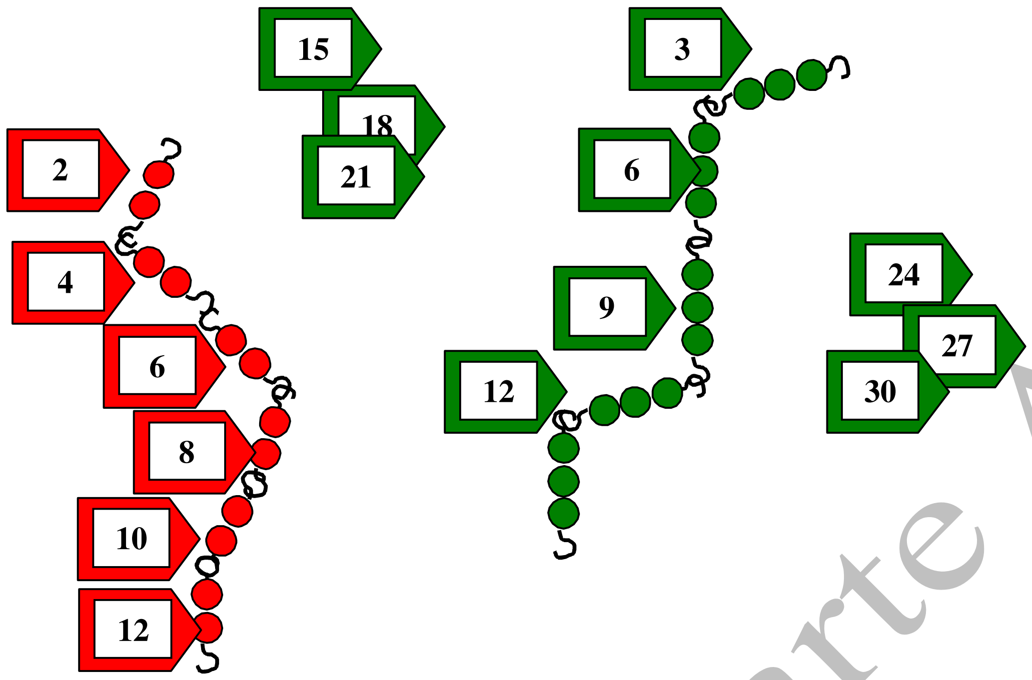
0.4.7.10.- A Multiplicação com Uso de Cabideiro e Fichas dos Números Múltiplos

A seguir é mostrada a figura do cabideiro de parede para as *contagens* de 2 em 2, de 3 em 3 e, assim por diante até, de 10 em 10, contagem esta que contém subliminarmente o conceito de multiplicação.



e as etiquetas coloridas para serem usadas como índices de contagem quando o material é, então, colocado sobre o tampo de uma mesa formando "serpentes", que são mostradas a seguir.





0.4.8.- Sobre as Críticas Indevidas ao Material Dourado

O que se viu até aqui é uma pequena parcela do livro *Psicoaritmética* de Maria Montessori. Sem dúvida, esta obra é ímpar no gênero, e muito poucos educadores a conhecem de fato. Por isto, exatamente é que muitas vezes se ouvem críticas ao Material Dourado, normalmente acusado de pouco prático e até mesmo ineficiente no tocante a dar base para a aprendizagem do sistema de numeração decimal e das operações aritméticas elementares.

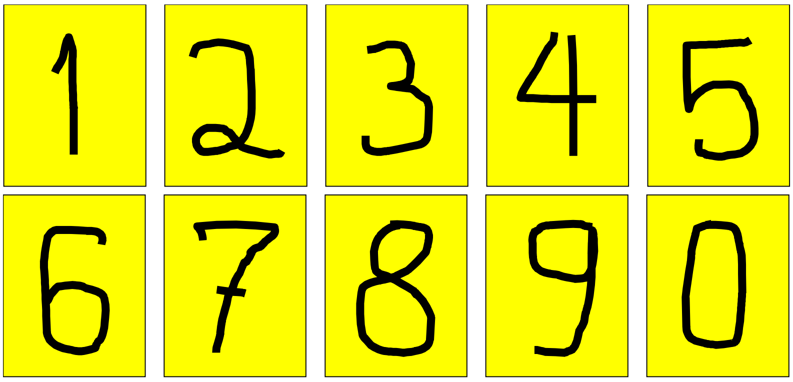
No entanto, pelo que foi visto até aqui, não procedem as críticas que normalmente são dirigidas ao Material Dourado em termos de eficiência e eficácia, pois é bem verdade que somente o uso dele não irá garantir a aprendizagem, a fixação e a transferência dos conhecimentos para novas situações que envolvam os conceitos, propriedades e operacionalização no Sistema de Numeração Decimal.

0.4.9.- A escrita correta dos Numerais de 0 até 9

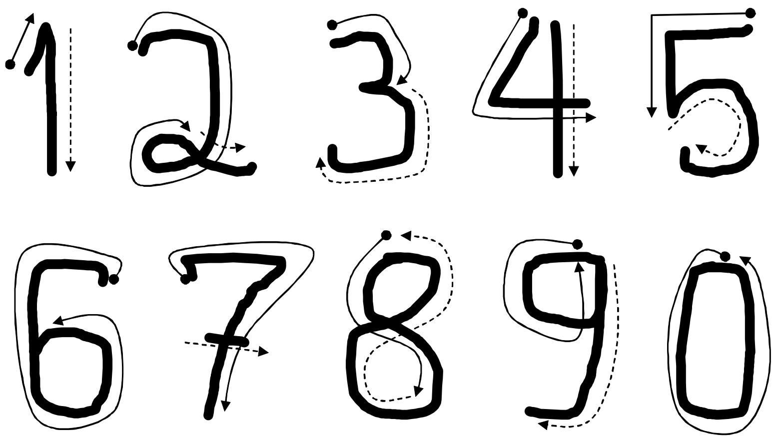
O material criado por Montessori foi fruto de uma mente privilegiada e dotada de grande sensibilidade psicopedagógica. Ela criava oportunidades de aprendizagem de um mesmo dado conceito através de abordagens distintas e complementares que deveriam ser apresentados alternadamente às crianças, como é o caso do Material Dourado, que quando utilizado de forma isolada, irá deixar lacunas na aprendizagem.

Ainda dentro desta concepção, um material tipicamente montessoriano, ou que definitivamente caracteriza a preocupação psicopedagógica desta educadora, são os numerais escritos em letras cursivas (letras de forma) que deveriam ser redesenhados pelas crianças usando o dedo indicador da

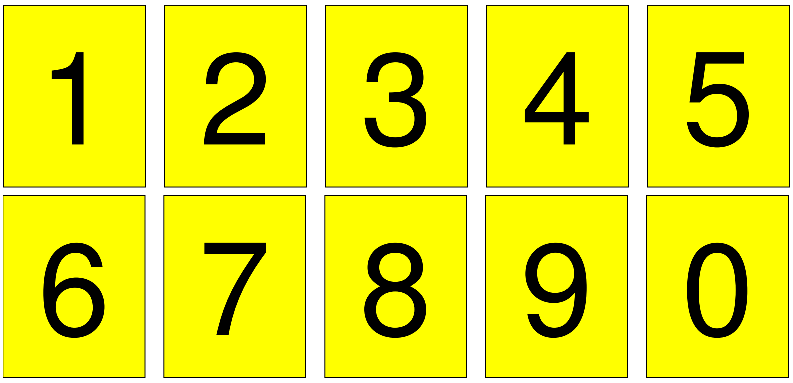
mão dominante – mão direita ou esquerda conforme a criança seja destra ou canhota. Estes numerais, normalmente desenhados em lâminas de madeira, são recobertos com um material áspero – arei ou serragem bem fina, ou fiapinhos de feltro, cuja adesão é conseguida com cola branca. Um efeito muito interessante é conseguido somente recobrindo-se os traços dos números com um filete espesso de cola branca, que ao secar deixa um ressalto bem sensível ao tato.



Numerais com indicações simbólicas (numeração e setas) indicando a ordem e direção da escrita



Numerais em letra de forma em alto-relevo, o que pode ser conseguido recobrindo as linhas com cola branca escolar, deixando-a secar por algum tempo.



A criança deve procurar estabelecer a correspondência entre os números escritos em letra cursiva e em letra de forma.

0.4.10.- Materiais Alternativos e Complementares

Muitos são os materiais que podem ser adicionados ao método de Montessori, sendo que um dos mais notáveis são as Barrinhas de Cuisenaire e os cartões de contagem que serão vistos ao longo deste livro (Vide item: *Aritmética Para Educadores - #05*).

0.4.11.- Conclusão

Como se afirmou no início deste testo, o número estimado de materiais específicos a serem utilizados no Método Montessori gira em torno de 4.000, incluindo-se aí não somente os materiais pedagógicos que incluem centenas de objetos e artefatos, bem como folhas impressas com esquemas para realização tarefas diversas, cálculos e desenhos, e aqueles destinados à alimentação - pratos, talheres e copos, e higiene – escova de dentes, pente, sabonete, toalha, etc, mas o mobiliário adaptado ao tamanho, ou seja, à altura das crianças: mesas, cadeiras, estantes, cabideiros, prateleiras, tapetes, carpetes e travesseiro E tudo isto deve estar localizado em uma escola ampla, com salas muitíssimo amplas e arejadas, um pátio amplo e ajardinado, quadras de esporte coberta e até mesmo uma piscina. Além, é claro de biblioteca e laboratórios de informática.No entanto isto envolve um custo elevadíssimo que desestimula aqueles que eventualmente pensam em abrir uma pequena escola segundo estes moldes. Isto, no entanto não invalida que se possa conhecer e utilizar alguns destes materiais, não somente pela sua eficácia, mas por tudo aquilo que eles têm de criativo e genial em termos de oportunização de aprendizagem.

0.4.12.- Montessori - Endereços úteis da Internet

Infelizmente para aqueles que não entendem inglês os sites a seguir são todos neste língua. No entanto vale um passeio por eles para ver as imagens e fotos dos materiais concretos ali apresentados. Estes sites, em sua maioria, oferecem para venda um farto material montessoriano de qualidade bastante grande. Vale a pena conferir.

- *http://www.bambini-montessori.com/ - Products presented by: category, image, description, objective, price – Is the best site*
- *http://www.thematerialscompany.com/ - Montessori Material*
- *http://www.cabdevmontessori.com - Montessori Material*
- *http://www.bruinsmontessori.com/home.php - Montessori Material*
- *http://www.montessorimaterials.org/index.htm - Free printable materials*

- *http://www.ux1.eiu.edu/~cfsjy/mts/_link.htm – Instructions for Montessori Manipulatives*
- *http://www.made-in-china.com/products-search/hot-china-products/Wooden_Block.html - um site da China(!)*
- *http://www.etacuisenairwwwe.com/ - Cuisenaire Material*
- *http://www.etacuisenaire.com/cuisenairerods/75th/georges.jsp - Biography and Sugesions*
- *http://www.1st-quality-school-supplies.com/*
- *http://www.brighterkids.com.au/*
- *http://regentsprep.org/Regents/math/teachres/Teachres.htm - Math Resources for Teachers – Access in the end of the page the following link: Math B*

0.5.- As Ideias de Seymour Papert e Caleb Gategno

No item '0.2.6. – Construcionismo: Sweymour Papert' do nosso primeiro volume nós apontamos Seymour Papert, um pesquisador do MIT – Massachusetts Institute of Technology, como o criador da idéia de micromundos, materiais concretos logicamente estruturados que ao serem explorados pelo indivíduo, costumam conduzí-lo a descobertas não somente destas propriedades lógicas, bem como de idéias matemáticas que permeiem os componentes do material (seus atributos, suas conexões e interdependências), permitindo a comprovação destas propriedades e, consequentemente, levem ao estabelecimento de regras específicas que dariam sentido a novos jogos e novas descobertas neste micromundo.

A concepção de Papert difere daquela proposta por Piaget – orientar entrevistas visando a descoberta de como os inivíduos aprendem –, bem como das idéias de Maria Montessori – a utilização de 'seus' materiais psicopedagógicos – com objetivo de fixar itens da aprendizagem de conceitos constantes do currículo escolar. Por outro lado, as idéias de Papert estão bem próximas das idéias de Caleb Gategno naquilo que diz respeito a um material criado por este último: o Geoplano, que será estudado em detalhes no terceiro volume desta série, volume este que trata do Pensamento Geométrico. Gategno foi também o divulgador do material numérico Barrinhs de Cuisenaire (vide neste volume: JARIT#03).

No nosso entender, Papert, Gategno e Maria Montessori podem ser 'classificados' como *Construcionistas*, enquanto deixamos para Piaget a 'classificação' de *Construtivista*.

0.6.- Concluindo

Serão sessenta os Micomundos/Materiais Concretos Psicopedagógicos apresentados neste livro e referidos como JARIT#01, ..., JARIT#60, cuja utilização é indicada à aprendizagem da Aritmética. Chamamos aqui a atenção dos leitores para que eles fiquem atentos e estabeleçam de forma clara a

diferença existente entre os Micromundos e os Materiais Concretos Psicopedagógicos, descobrindo ainda a forma de melhor utilizar estas ferramentas no dia-a-dia da escola.

JARIT#01 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO #01

A Aquisição do Conceito de Número e os Numerais

Este é um tópico básico sobre a aprendizagem no campo da aritmética. Ele envolve uma discussão sobre o que seja a classificação, a sequenciação, a ordenação e a seriação, que são conceitos necessários para se estabelecer de forma clara a distinção entre o conceito de número do conceito de numeral.

1.1.- Classificar + Seqüenciar + Ordenar = Seriar

Quando as crianças brincam ou jogam livremente com objetos quaisquer, ou em casos bastante específicos, com um material concreto especialmente preparado para isto – os materiais Psicopedagógicos ou um Micromundos –, elas vão aos poucos descobrindo e reconhecendo as possíveis regularidades ou padrões e, muitas vezes, as propriedades ou especificidades, que estes objetos apresentem.

1.1.1.- Classificando Objetos

Assim é que, cada "tipo" de regularidade ou propriedade comum dos objetos poderá 'sugerir' a criação de grupos ou conjuntos de objetos, isto é, permitirá que as crianças estabeleçam classes de objetos, e isto, segundo seus próprios critérios – normalmente para elas, critérios bastante pessoais, muitas vezes de difícil explicação (verbalização).

Segundo Piaget uma classe "[...] é uma reunião de termos (indivíduos ou subclasses) considerados como equivalentes, independentemente de suas diferenças". E Piaget, afirma ainda que: "Classe é um conjunto de termos que podem ser substituídos uns pelos outros".

1.1.2.- Sequenciando Classes de Objetos

Quando uma criança estabelece uma classe de objetos, normalmente, o próximo passo seria sequenciar estes elementos. No entanto, cabe frisar aqui, que muitas classes não são sequenciáveis. Por outro lado, em alguns casos bastante particulares, elementos de uma mesma classe pode se constituir numa sequência até bastante natural, que poderá ser ordenada e mesmo poderá ter, em alguns casos mais raros, uma lei de formação interna.

Quando as crianças pequenas brincam, elas costumam colocar os seus brinquedos em fila. Normalmente, estas filas não apresentam os objetos segundo alguma lei ou tipo de organização

detectável pelos adultos, podendo ocorrer que para a criança a sequência tenha até alguma lógica, no entanto esta lógica pode não ser evidente nem detectável por um adulto.

Nos exemplos a seguir iremos utilizar números por justamente pela facilidade de conseguirmos transmitir aquilo que pretendemos.

1. Uma sequência não ordenada de números inteiros: 8; 32; 22; 6; 8; 12; 10; 4.
2. Uma sequência ordenada de números inteiros com uma lei de formação interna: 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20. Esta é a seqüência dos números inteiros pares de 2 a 20.
3. Uma sequência ordenada de números inteiros, mas sem lei de formação aparente: 4; 6; 8; 8; 10; 12; 22; 32. Note que esta é a nossa primeira seqüência (vide 1.), ordenada de forma crescente.

1.1.3.- Sequenciação não é Seriação

Muitos educadores usam as palavras série e seqüência como se fossem sinônimas. Elas não são. Neste texto adotaremos a palavra *sequenciação* ao invés da palavra seriação que é a que costuma aparecer (possivelmente de forma errônea) nas traduções das obras de Piaget.

Neste nosso texto adotaremos sequência como: efeito de dar continuidade ao que foi iniciado; seguimento, prosseguimento; quantidade de fatos ou coisas da *mesma classe* que se apresentam um após o outro, em sucessão espacial, temporal ou quantitativa (número).

Não somente a classificação, mas também a sequenciação são tipos de disposições ou de raciocínios utilizados pela criança para as suas primeiras “leituras” do mundo, ou seja, ela organiza seu mundo para tentar melhor entendê-lo.

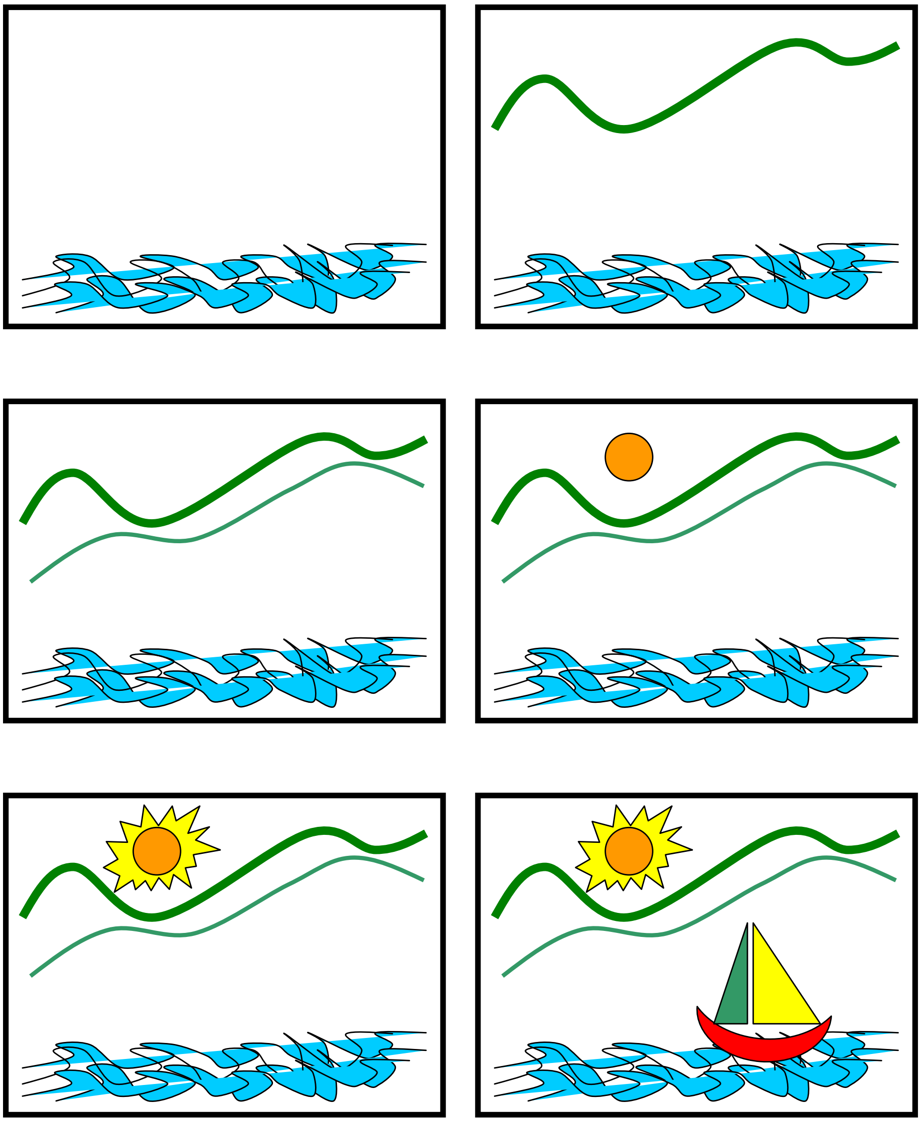
1.2.- As Sequências Temporais Gráficas

Uma sequência temporal é um material didático composto por um conjunto de cartões com desenhos onde se prevê que algo está acontecendo ao longo de certo espaço de tempo (ou na medida que passa o tempo), cabendo às crianças ordená-los de maneira lógica, ou seja, as crianças devem dar sentido a uma sequência de desenhos ou figuras como se fosse os quadros de um filme.

Há basicamente dois tipos de conjunto de cartões de sequenciamento: aqueles que permitem a sequenciação direta (ou crescente) e a sequenciação indireta (ou decrescente), e aqueles que permitem operar apenas com um destes dois casos. O primeiro exemplo dado a seguir naturalmente se apresenta como uma sequenciação direta. O segundo conjunto já permite as operações de sequenciação direta e indireta.

1.2.1.- Compondo um Desenho

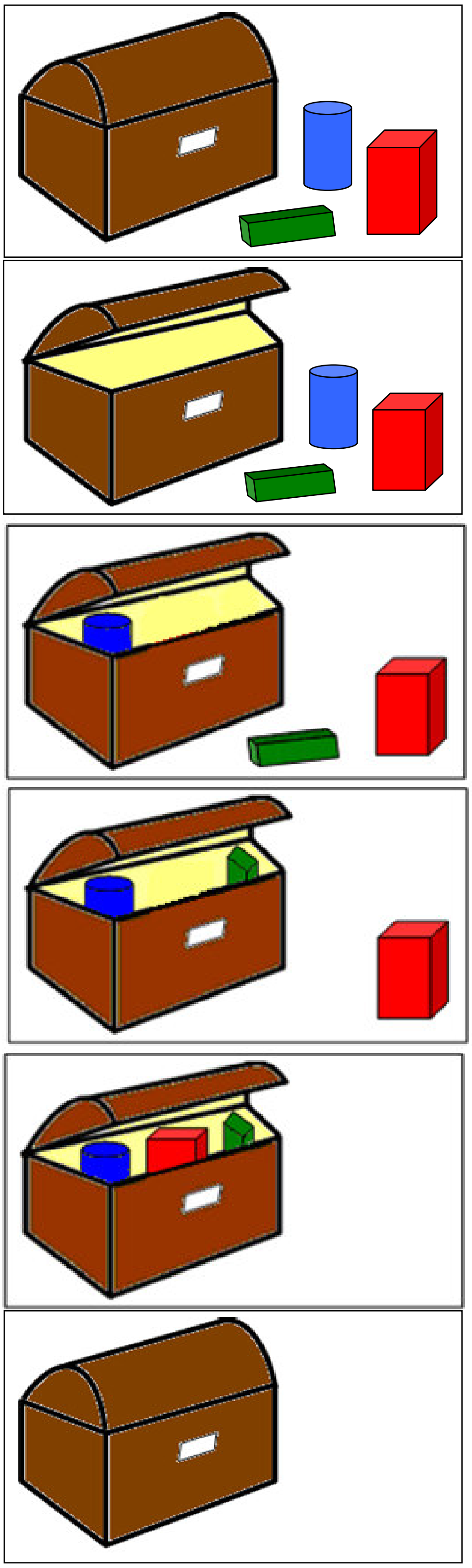
Os seis cartões a seguir mostram as várias etapas de composição do desenho de um barquinho navegando no mar, num dia de sol:



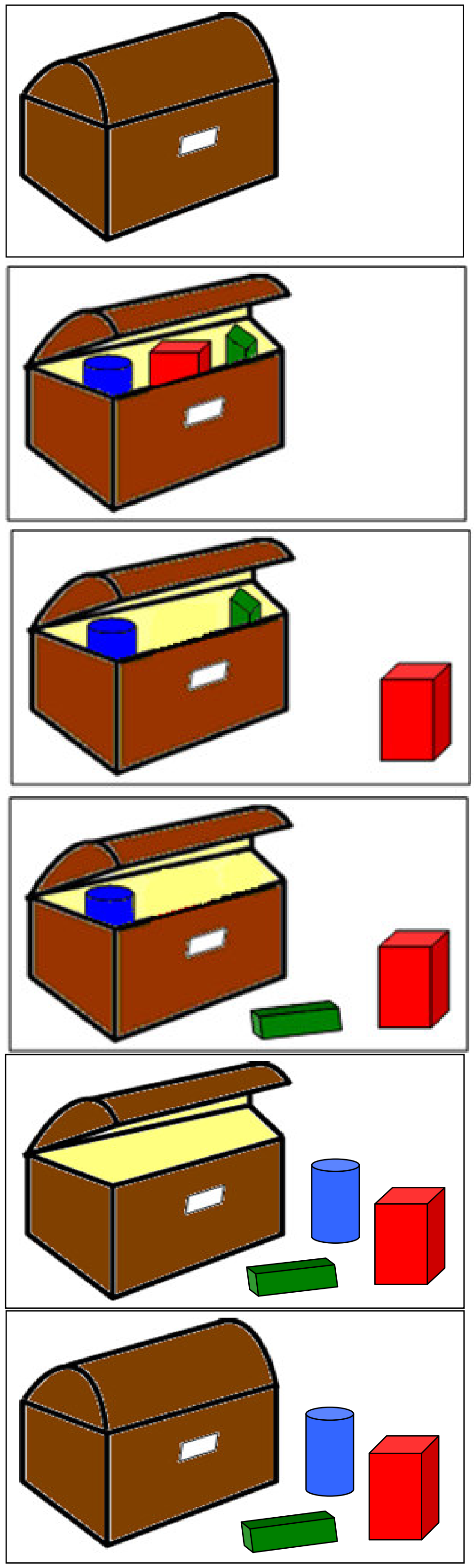
1.2.2.- Colocando ou Retirando Objetos de um Baú

A seguir mostramos um exemplo de um conjunto de cartões que permitem a sequenciação direta ou a sequenciação indireta. A seguir, na primeira coluna mostramos o seguinte: três objetos devem ser colocados um a um num baú. Na segunda coluna, o que ocorre é o contrário do que fizemos na primeira coluna, os objetos são retirados do baú.

Colocando objetos no baú:

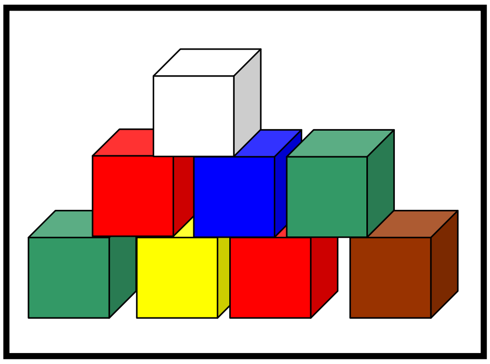


Retirando objetos do baú:

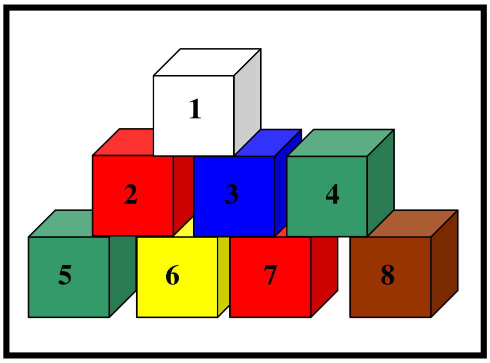


1.2.3.- Retirando e Colocando Objetos em uma Pilha

O conjunto de cartões a seguir permitirá encontrar diversas soluções para o sequenciamento seja do empilhamento seja do desempilhamento dos oito cubos coloridos.

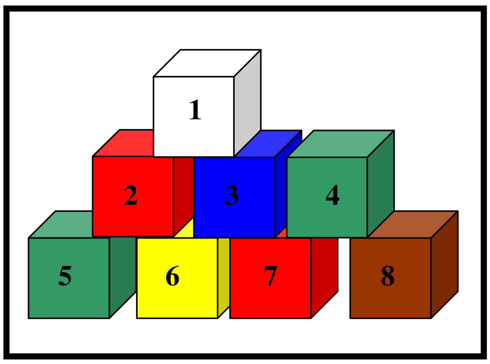


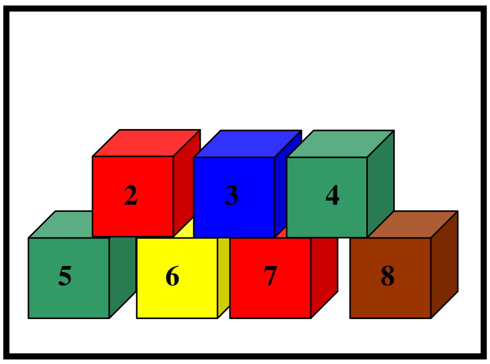
Os dois estudos que mostramos a seguir nos permitirão gerar todos os cartões representativos destas duas formas possíveis de desempilhamento (empilhamento) dos oito cubos. Devemos esclarecer que há outras mais formas de proceder ao desempilhamento (empilhamento). Para facilitar o nosso estudo iremos numerar os cubos de cima para baixo e da esquerda como mostrado a seguir:

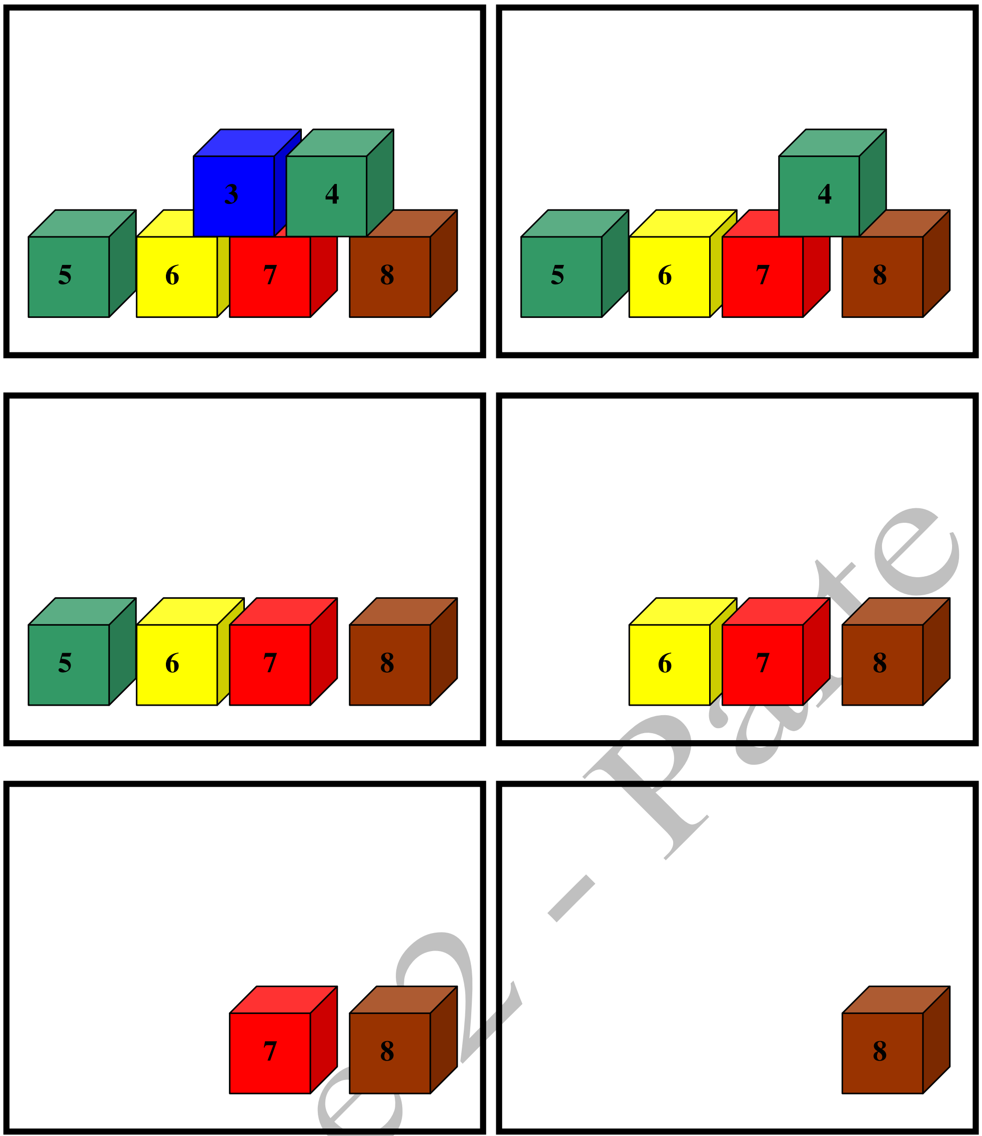


1.2.3.1.- Gerando um Primeiro Conjunto de Cartões Sequenciais

Vejamos o caso em que a regra seria a seguinte: *'Os cubos devem ser retirados de cima para baixo e da esquerda para a direita'*.



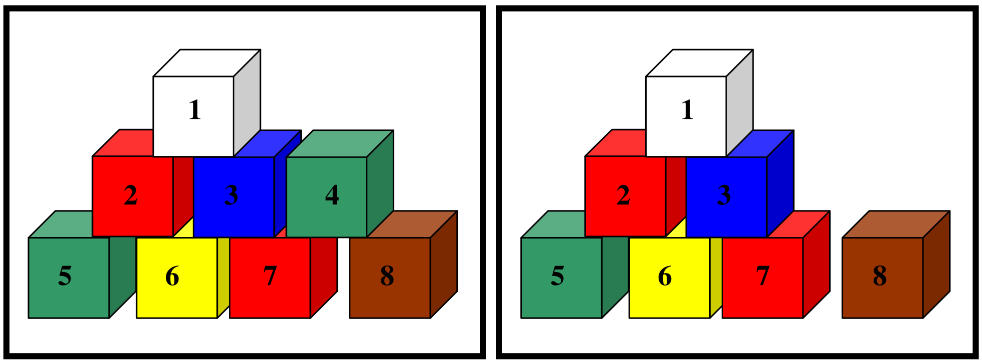


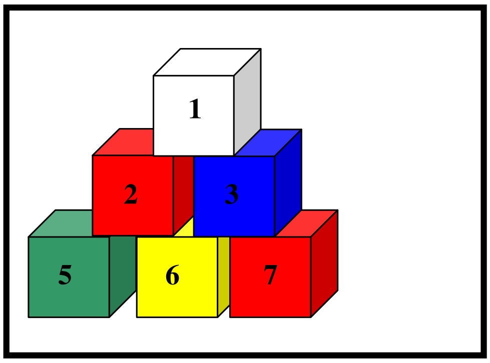


1.2.3.2.- Gerando um Segundo Conjunto de Cartões Sequenciais

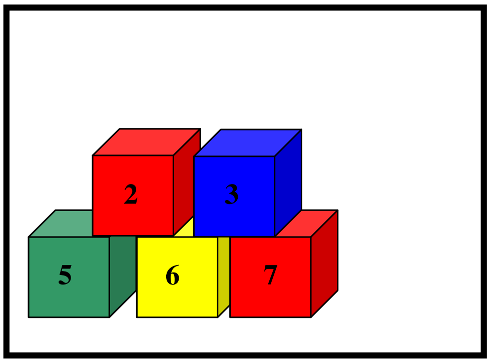
Vejamos o caso em que a regra consiste em: *'Os cubos devem ser retirados de forma a manter a pilha com a máxima altura e quando tivermos que retirar cubos que estejam na mesma linha, retiraremos o mais à esquerda'*.

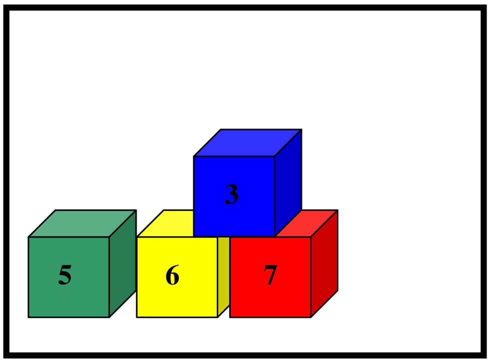
1º Passo - Devemos manter o cubo número 1 para manter a máxima altura:



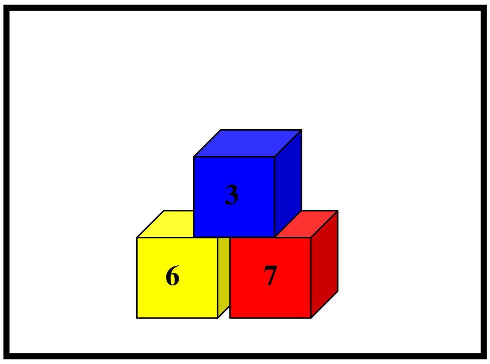


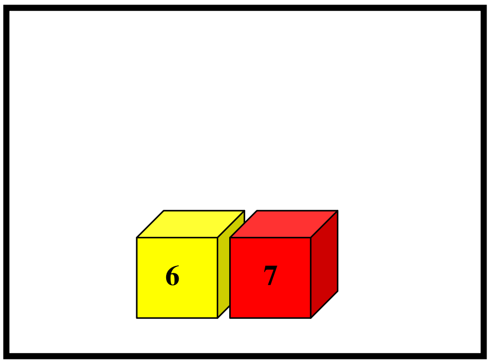
2º Passo - Devemos manter o cubo número 3 para manter a máxima altura e retirar o cubo da esquerda, o de número 2 e depois o cubo número 5:

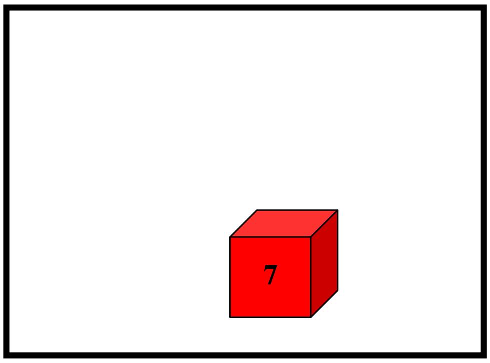




3º Passo – Retirar o cubo número 3 e depois o de número 6:







1.2.3.3.- Um Jogo Para o Pensamento Lógico-Aritmético

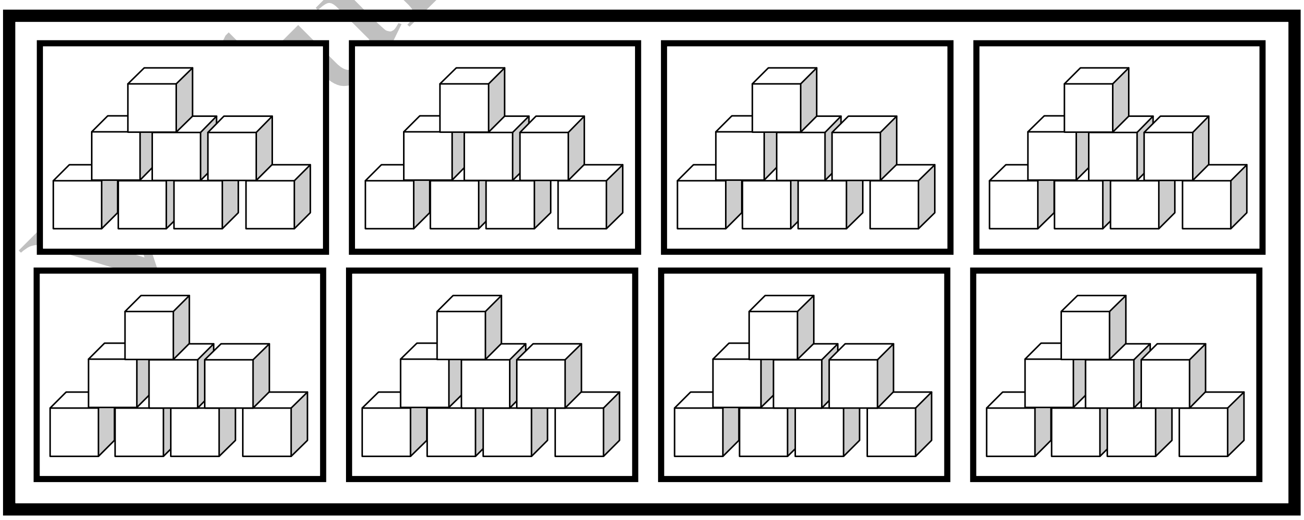
O leitor pode, ao trabalhar com crianças nos primeiros anos de escolarização com o segundo Jogo Para o Pensamento:

1. Embaralhar os dois conjuntos de cartões acima, retirando um dos cartões onde aparecem a pilha com os 8 cubos (eles são exatamente idênticos);
2. Solicitar as crianças (em grupos de dois, três ou quatro) que separe os cartões cuja sequência seja dada por uma das seguintes regras:
   a. *'Os cubos devem ser retirados de cima para baixo e da esquerda para a direita'.*
   b. *'Os cubos devem ser retirados de forma a manter a pilha com a máxima altura e quando tivermos que retirar cubos que estejam na mesma linha, retiraremos o mais à esquerda'.*
3. No caso de dificuldade extrema para resolver um ou outro dos problemas acima avisar que: "– São 8 cubos e eu devo retirar um cubo de cada vez"; e ainda "– Irão sobrar 8 cartões" ou " – O jogo é resolvido apenas com 8 dos cartões."

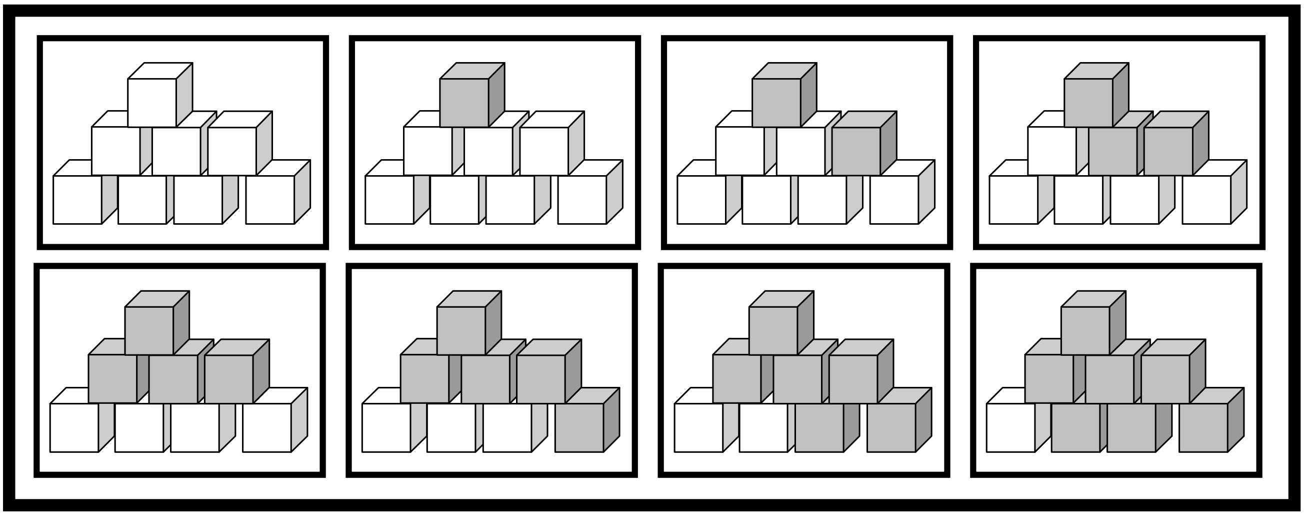
1.2.3.4.- Um Desafio para os Leitores Mais Atentos

A seguir vamos fornecer aos nossos leitores, um mapa contendo os nossos Cartões de Sequenciamento dos Oito Cubos Empilhados para que eles possam criar os conjuntos de cartões de acordo com a ordem ou regra de desempilhamento por eles s escolhidas. Outros destes mapas podem ser impressos a partir do CD-R que acompanha este livro.

Use um lápis preto ou colorido para sombrear os cubos desempilhados indicando que eles forem sendo eliminados do cartão.



Uma regra obvia poderíamos sugerir aqui é: "*'Os cubos devem ser retirados de cima para baixo e da direita para a esquerda", cujo resultado aparece abaixo.*



Tente encontrar outras regras para o desempilhamento dos cubos.

1.3.- Retomando os Conceitos de Ordenação e Seriação

Entende-se por ordenação a colocação (mais ou menos rigorosa) de termos de uma sequência em correspondência biunívoca (um para um) com os valores ordinais - 1º, 2º, 3º etc., obedecendo-se certas características que estabelecem a preponderância (muitas vezes inegociável) entre os termos assim organizados.

Como se viu acima, se uma sequência é ordenável e tem o que possa ser chamada de lei matemática de formação – um padrão único que une os seus elementos – temos aquilo que caracterizaria uma série.

É a ordenação que permite a criação das séries. Assim, quando se afirma que a criança fez uma seriação, está se estabelecendo que a criança colocou os termos ou objetos em ordem estrita que possivelmente permite uma formulação matemática que explica aquela ordenação.

Assim sendo, nem sempre uma sequência é necessariamente uma série, mas uma série é uma sequência com uma lei matemática de ordenação é uma série.

1.3.1.- Sobre Sequências e Séries

A *Sequência dos Números Naturais*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,... poderia ser denominada por acréscimo, como sendo a Série dos Números Naturais. O mesmo ocorre com as sequências: 0, 2, 4, 6, 8,... e 1, 3, 5, 7, 9, ..., respectivamente denominadas série dos números pares e série dos números ímpares, cujas leis matemáticas são: 2n, para n= 0,1, 2, 3, 4, ..., e 2n+1, para n= 0, 1, 2, 3, 4, ... O leitor deve

verificar que a palavra 'série' utilizada aqui de forma correta, parece algo redundante, quando a palavra 'sequência' nos parece completamente suficiente.

1.3.2.- Um Jogo Para o Pensamento

A sequência de operações 'Classificação + Sequenciação + Ordenação = Série' sugere ao educador um conjunto de ***jogos para o pensamento***, que podem ser propostos aos seus alunos:

1. Levar a criança a discriminar as diferenças que porventura existam entre termos de uma mesma classe.
2. Levar a criança a estabelecer novos agrupamentos de termos segundo um ou mais critérios sugeridos pelo educador.
3. Levar a criança ao entendimento de que um critério pode ser mais abrangente ou menos abrangente que outros; questionando: Qual dos critérios é melhor?

1.4.- Contando de 1 até 10

Não é necessária a compreensão do que seja um número para que se possa ensinar a seqüência de contagem verbal: "um, dois, três, ..." para uma criança. Muitas crianças auxiliadas por seus pais recitam a seqüência de 1 até 10, quase sem erros na maioria das vezes que o fazem. Mas isto não é um indicativo de que a criança possua a noção de número ou que quando precise recitar esta sequência, o faça corretamente. Todos nós já notamos que muitas crianças, ***ao brincarem,*** utilizam os números num tipo de contagem extremamente desorganizada: "um, dois, cinco, dois, três, já...", numa tentativa de imitar as crianças mais velhas, para quem a sequência numérica já se encontra decorada de forma ordenada, entendida e é significativa.

Dificilmente, numa primeira etapa desta *'recitação'* ordenada dos nomes dos números, a 'recitação' dos numerais, a criança consegue entender a relação entre determinado nome e a quantidade a ele correspondente. Isto é, a criança demora a estabelecer a relação biunívoca que liga os números, quantidades, aos seus nomes, os numerais falados.

Enquanto os números são as quantidades invariantes pela mudança de posição, ordenação ou qualquer outro tipo de organização dos elementos de um conjunto, os numerais falados (ou escritos) são símbolos sociais-arbitrários a serem associados a cada um dos números. Esta associação entre a contagem, uma sequência ordenada, que deve ser "decorada", e as quantidades, que parece tão fácil para um adulto, é um processo extremamente elaborado para o pensamento infantil. Este mesmo caminho de conquistas deve ser continuado, talvez com maior dificuldade, quando a criança passa a utilizar a escrita simbólica para representar os números. Nesta etapa o pensamento comanda a ação

motora, olhos e mãos se associam nesta tarefa e os símbolos "1, 2, 3, ...", ao serem escritos, devem ser associados a seus nomes, que por sua vez estarão associados às quantidades.

Após estas etapas, a criança deve aprender a comparar símbolos pensando nas quantidades que eles representam. Ela deve aprender a adicionar quantidades, subtrair, multiplicar e dividir. Deve ainda entender a linguagem falada e, entender a linguagem escrita, que é a forma com que os "problemas de matemática" são a elas apresentados. Todo este processo é longo, geralmente começa aos 4 anos de idade e vai até os 11 anos. Muitos problemas ocorrem durante a aprendizagem da subtração, da multiplicação e da fixação da tabuada, da divisão e da utilização do algoritmo da divisão, da potenciação e de muitos outros conceitos matemáticos relevantes.

1.4.1.- Sobre a Aprendizagem da Aritmética - Comentário Final

Vê-se, pelo que foi relatado, que o processo de construção e reconstrução do pensamento aritmético, que embasará os processos que se estenderão pelo resto das vidas destas crianças, tem muito mais de lógico do que de matemático.

O que ocorre é que o processo lógico envolvido nestas construções está subjacente ao processo, se dá a nível interno do indivíduo que aprende e, na maioria das vezes, não é percebido ou é, geralmente, desconhecido dos educadores, sejam eles os pais, os professores ou os formuladores de políticas educacionais.

1.5.- Sobre os Números e os Numerais

A idéia de número é precedida, como se viu até aqui, por uma série de 'processos' e/ou 'operações mentais' que vão sendo conquistados arduamente pelas crianças pequenas. A idéia de classificação deve ser acrescida da idéia de sequenciação, que por sua vez deve levar em conta a idéia de ordenação, para finalmente se chegar à idéia de número: a conservação da quantidade de objetos, independente da disposição dos mesmos.

Há que se tentar auxiliar as crianças nesta difícil busca ao se utilizar materiais de contagem, tais como as denominadas *caixas de contagem* – caixas contendo: botões, palitos, bolinhas, tampas de refrigerante etc –, seja ajudando-as a recitar a sequência dos numerais associadas às quantidades a elas correspondentes, seja apontando-se quantidades de objetos retirados da caixa de contagem para que elas digam o numeral correspondente. As caixas de contagem e palitos podem ser utilizados para a concretização dos fatos aritméticos relevantes como as quatro operações e suas propriedades.

No entanto, existe um material de baixo custo – que pode ser construído pelo próprio professor utilizando palitos de sorvete – que poderia ser utilizado nesta fase e nas demais fases da aprendizagem

da aritmética por crianças dos 4 aos 11 anos, as Barrinhas de Cuisenaire, que é um micromundo aritmético muito completo e versátil (vide: JARIT#03), sem mencionar aqui os ricos materiais Psicopedagógicos Montessorianos (vide: item 0.4.1. nos Prolegômenos deste livro), muito mais diversificado, mas um pouco mais caros que o material anterior e de difícil elaboração.

1.5.1.- Sabendo Mais Sobre os Numerais

Uma régua escolar graduada exibe os seus numerais, normalmente de 0 até 30, todos eles compostos, de forma combinada, pelos 10 numerais hindu-arábicos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, que são também, denominados algarismos. A notação dos numerais hindu-arábico é posicional, isto é, dependendo da posição: o numeral é respectivamente multiplicado por 1, 10, 100, 1000, etc (unidade, dezena, centena, milhar, etc)[4]., Assim o numeral 2345 vale: 2000 + 300 + 40 + 5, mas 5432, apesar de conter os mesmos algarismos, valerão: 5000 + 400 + 30 + 2[5].

Outros numerais que também devem ser ensinados nas escolas de primeiro grau são os *numerais romanos*. Os numerais romanos são apenas sete: I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500) e M (1000), e sua notação não é posicional. Ainda deve-se acrescentar que os numerais romanos não devem ser chamados de algarismos que é o nome exatamente de cada um dos símbolos da numeração hindu-arábica. Vale ainda recordar algumas escritas especiais destes números: III (3), IV (4), VIII (8), IX (9), XXX (30), XL (40), CD (400), DCC (700), MMM (3000). deve-se lembrar ainda que um traço colocado sobre os numerais permite multiplicá-lo por 1000, assim $\overline{\mathrm{IV}}\mathrm{DXXVII}$ representará o número 4.527.

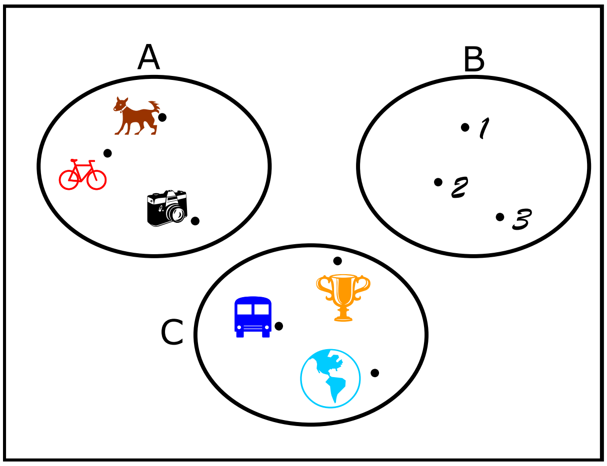
Uma outra curiosidade sobre a estes dois sistema de numeração é que o hindu-arábico tem o zero, mas o sistema de numeração Romano não o tem. Na verdade a introdução do zero nesse sistema de numeração é algo bastante recente em termos históricos.

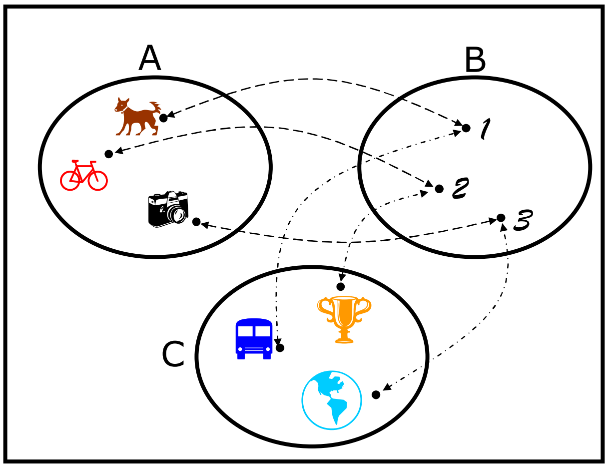
1.5.2.- Correspondência Biunívoca e Cardinalidade de Conjuntos

Na primeira das figuras a seguir são mostrados três conjuntos. Estes conjuntos são formados por elementos completamente díspares, no entanto uma propriedade comum os une: eles têm a mesma quantidade de elementos.

[4] Este é o denominado: Princípio Multiplicativo dos numerais hindu-arábicos.

[5] Este é o denominado: Princípio Aditivo dos numerais hindu-arábicos.





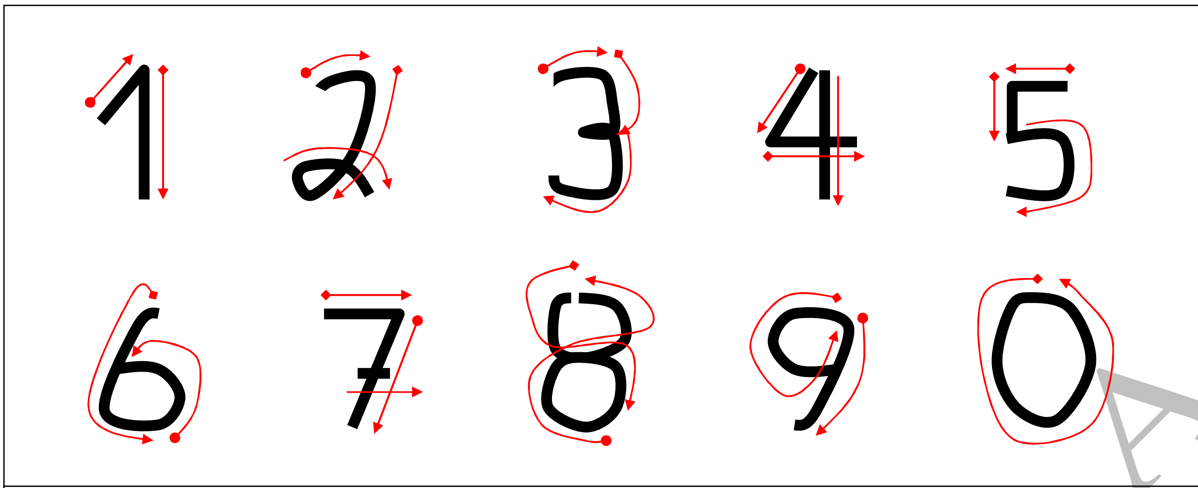
Esta ocorrência pode ser colocada em uma linguagem mais formal: os elementos destes conjuntos podem ser colocados em correspondência biunívoca, isto é: (a) pode-se estabelecer entre estes conjuntos uma correspondência um-a-um; (b) a cardinalidade destes conjuntos é 'três', ouseja, card(A) = card(B) = card(C) = 3, ou ainda, #(A) = #(B)=#(C) = 3.

A quantidade de elementos, que é a propriedade comum destes conjuntos, é o que chamamos de número.

A *quantidade* de elementos destes conjuntos – a cardinalidade – é expressa sob a forma de um valor numérico, um '*número*', cujo *numeral* (símbolo) poderá ser representado por: "três" em português, "trois" em francês, "three" em inglês, "3" em numerais hindu-arábicos (algarismos) e "III" em numerais romanos, e assim por diante. Um números (uma quantidade) pode ser representado por numerais (símbolos) diversos.

1.5.3.- A Grafia Correta dos Numerais Hindu-Arábicos

O que a experiência tem mostrado é que a maioria dos professores alfabetizadores não se preocupa em ensinar e cobrar, de seus alunos, a correta maneira de se escrever os numerais indo-arábicos (' 0 ,1, 2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 '). Veja a seguir, sob forma de sugestão, uma maneira praticamente padronizada por técnicos em alfabetização para a escrita dos numerais indu-arábicos. No quadro, as flechas servem para indicar o ponto inicial e o sentido a ser seguido na escrita, as demais flechas continuam indicando, quando se fizer necessário, o sentido a ser seguido.

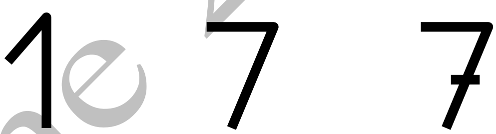


Legenda: início: meio: final:

Uma pergunta feita por muitos educadores é a seguinte: “O numeral hindu-arábico sete deve ser cortado?”. Entendemos por corte o pequeno sinal que diferencia a escrita do numeral ‘sete’ como mostrado a seguir.

Há dois motivos básicos que justificam o ‘corte’ no numeral hindu-arábico ‘7’, a saber:

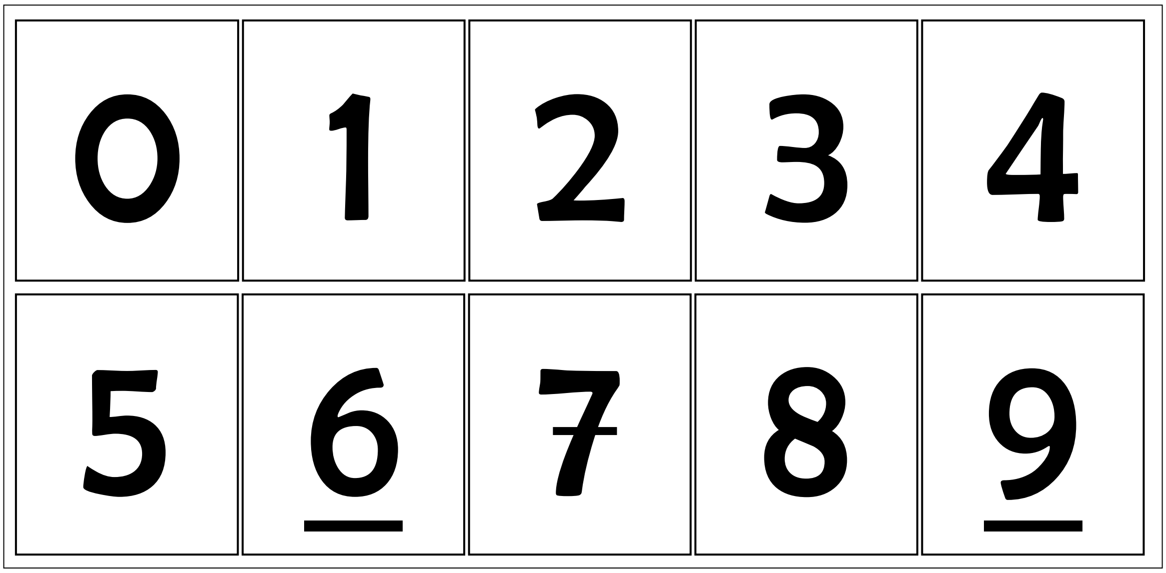
1º - Quando manuscrito, sem o devido cuidado o numeral sete pode vir a ser confundido com o numeral um. Diga-se de passagem, que esta confusão pode causar problemas terríveis no caso de escrituração contábil.



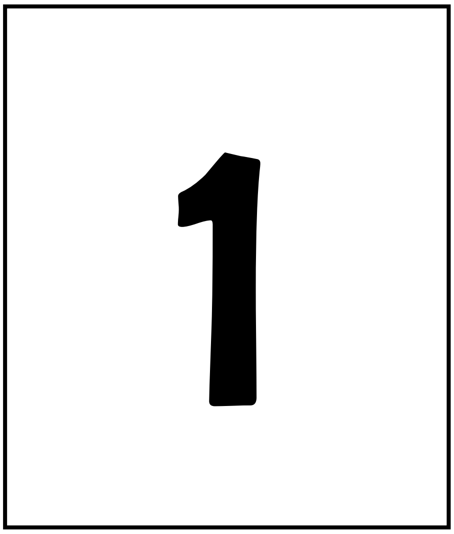
2º - O costume de ‘cortar’ o numeral 7 parece ser uma tendência dos povos latinos, não utilizada pelos povos anglo-saxões. Sou, não somente como latino, mas em termos pedagógicos, a favor de se cortar o sete. Pense sobre isto.

1.5.4.- Numerais Táteis

As fichas a seguir, medindo 7cm × 6cm, com os numerais hindu-arábicos, se destinam ao trabalho supervisionado pelo educador que prevê que as crianças percorram os contornos do numerais de acordo com a tabela acima.



O cartão a seguir é um modelo em verdadeira grandeza dos cartões mostrados acima.



As fichas contendo os numerais tácteis devem ser preparadas com antecedência pelo educador de acordo com o seguinte:

1. Imprimir o conjunto de fichas a partir do arquivo contido no CD-R que acompanha este volume;
2. O conjunto de fichas deve ser plastificado;
3. Cada um dos numerais deve agora ser contornado com um filete de cola plástica para criar um tipo de ressalto que deverá ser perceptível pelo tato;
4. Esperar a cola secar e refazer o processo se necessário para aumentar o volume do ressalto.

1.6.- Contar nos dedos está errado?

Muitos professores, e até mesmo pais, estão preocupados com as crianças que fazem cálculos utilizando os dedos para realizar contagens e, sabe-se de casos, em que os educadores chegam a proibir as crianças de contarem nos dedos. Uma pergunta muito comum destes educadores é: “Contar nos dedos está certo?”.

A criança que conta nos dedos está apenas recorrendo a um material concreto disponível que permite a ela não somente controlar a contagem dos valores envolvidos numa dada operação, mas também entender algoritmicamente o que sejam a adição, subtração, multiplicação e divisão. É bem verdade que os dedos são utilizados geralmente para contar quantidades pequenas e geralmente para simular, ou ainda melhor, para concretizar a adição e a subtração. Os dedos podem ser utilizados para a multiplicação, mas raramente o são para concretizar uma divisão. As crianças utilizam os dedos como já o utilizavam os nossos ancestrais, para a contagem e para concretizar as operações aritméticas. Nosso sistema de numeração decimal deve sua origem possivelmente aos dez dedos que temos nas mãos. Seria o nosso sistema decimal se tivéssemos seis dedos em cada uma das mãos?

Cremos que nós usaríamos o sistema sexagesimal[6] (base 60), como foi realmente utilizado na antiguidade, possivelmente pela facilidade de se poder dividir a quantidade ‘60’ de diversas maneiras inclusive por 12, e provavelmente estaríamos utilizando um sistema baseado na dúzia e na groza para a contagem. A groza que vale doze dúzias, ou seja, vale 144.

Assim, se a nossa base de contagem fosse 12, a dezena na base 10 corresponderia à dúzia (12); a centena na base 10 ($10\times10 = 100$) corresponderia a groza ($12\times12 = 144$) na base 12. O milhar na base 10 ($10\times10\times10 = 1000$) corresponderia ao número 1728, pois $12\times12\times12 = 1728$, na base 12.

Parece ser bem improvável que as crianças, ao estarem aprendendo contagem e as operações, possam dispensar a contagem com materiais concretos tais como palitinhos, contas, pedrinhas, e nos dedos, preferindo recorrer à memorização ou a imagens mentais.

[6] Na língua francesa a base sessenta (sexagesimal) ainda preserva seu sinal na contagem: ‘dix’ =10; ‘vingt’=20; ‘trente’=30; ‘quarante’=40; ‘cinquante’ =50; ‘soixante’ = 60; ***‘soixante-dix’=sessenta-dez=70;*** ‘quatre-vingt’= quatro-vinte = 80; ‘quatre-vingt-dix’ = quatro-vinte-dez = 90; cent = 100

JARIT#02 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO #02

A Teoria dos Conjuntos e os Símbolos da Lógica Matemática

A Teoria dos Conjuntos em termos pedagógicos deveria preceder as idéias teóricas sobre o processo de aquisição dos conceitos de números e a aprendizagem dos numerais, no entanto, em termos práticos a aprendizagem dos números a partir da 'recitação' da série de números inteiros de 1 até 10, por exemplo, se dá desde a mais tenra idade do indivíduo. Se por um lado, a criança pode aprender a contar com seus familiares, por outro lado, a Teoria dos Conjuntos é extremamente abstrata, o que restringe o seu ensino às instituições escolares. O mesmo fato ocorre com a simbologia da Lógica Matemática, este estudo deveria preceder o estudo da Teoria dos Conjuntos, no entanto, esta simbologia é geralmente introduzida na medida em que se mostra necessária ao longo de alguns cursos de Matemática.

2.1.- Conjuntos

A noção de conjunto é intuitiva, ou seja, não é definida. Também, as noções de elementos de um conjunto e a pertinência destes elementos a um conjunto são intuitivas. Talvez, até por isto mesmo, na Educação Matemática os conceitos de conjunto, elemento, pertinência de elementos a conjuntos, e a de correspondência biunívoca seja apresentado às crianças de forma quase natural juntamente com o conceito de contagem e de cardinalidade de um conjunto (vide JARIT#01, item 1.3.2.).

O quadro a seguir mostra as diversas formas de representação de um dado conjunto: o conjunto das vogais:

A é o conjunto das vogais do alfabeto português:

$A = \{x \mid x \text{ é uma vogal}\} = \{a,e,i,o,u,y\}$

B é o conjunto dos números inteiros entre 1 e 8:

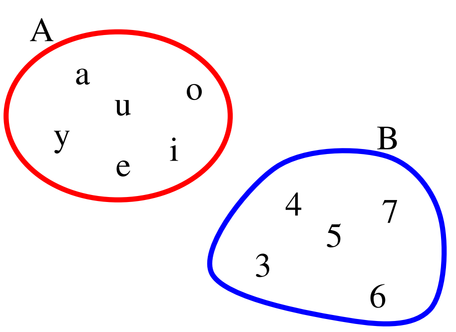
$B = \{x \mid x \text{ é inteiro}, 2 < x \leq 7\} = \{3,4,5,6,7\}$

Observar que:

$A = \{a,e,i,o,u,y\} = \{i,a,y,e,u,o\} = \{e,a,o, u, y,i\}$

$B = \{3,4,5,6,7\} = \{6,7,4,5,3\} = \{7, 3,4,6,5\}$

Diagramas de Venn-Eüler



Na figura acima temos o seguinte:

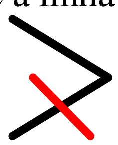
- A forma de representação ‘ A = {x | x é uma vogal} ’ apresenta o conjunto A pela propriedade de seus elementos, e a leitura é a seguinte: “A é igual ao conjunto dos x, tal que x é uma vogal”; aqui o x é uma variável que representa cada um dos elementos cuja propriedade é a de ser uma vogal do alfabeto português, notando que o y faz parte do alfabeto português atual.
- A forma de representação ‘ A = {a,e,i,o,u,y} ‘é denominada forma de listagem, onde os elementos do conjunto são apresentados um a um, sob a forma de uma lista não necessariamente ordenada, como no exemplo: A={a,e,i,o,u,y}={i,a,y,e,u,o}={e,a,o, u, y,i}.
- Quanto à pertinência podemos estabelecer que $u \in A$ e que $3 \notin A$, ou que $b \notin A$, que serão lidos: “o elemento u pertence ao conjunto A”, “3 não pertence a A” e “b não é elemento de A”; assim também podemos estabelecer que: $3 \in B$ mas $9 \notin B$.

2.2.- Relações de Ordem Entre Elementos de Um Conjunto

Vamos introduzir aqui a relação de *desigualdade* – uma relação de ordem – entre elementos de um dado conjunto numérico:

1. Seja tomar o conjunto B do exemplo dado acima (item 3.1.): B = {3,4,5,6,7};
2. Seja considerar dois elementos quaisquer x e y de B, isto é, $x \in B$ e $y \in B$.
3. Comparando x a y temos as seguintes possibilidades:
   a. Temos que x ou será igual a y ou x será diferente de y: $x = y$ ou $x \neq y$.
   b. Se x é diferente de y, então x excede y ou y excede x: se $x \neq y$ então $x > y$ (ler: x é maior que y) ou $x < y$ (ler x é menor que y).
4. Confira os exemplos: 3 = 3; 5 ≠ 3 logo podemos estabelecer que 5 > 3 (verdade) ou que 5 < 3 (falso), mas se 5 não é maior que 3, então o seu oposto é verdadeiro: 5 < 3.
5. Os símbolos ‘ > ‘ e ‘ < ‘ são lidos respectivamente: “maior” e “menor”. A figura a seguir nos mostra uma maneira prática de reconhecimento dos símbolos ‘maior do que’ e ‘menor do que’:

Corte a linha inferior do símbolo com um pequeno traço:



parece com o número 7 (maior)

parece com o número 4 (menor)

6. No caso de conjuntos ordenáveis não numéricos podemos utilizar uma outra relação de ordem: a *ordem de precedência*, que nos permite estabelecer elementos que precedem ou que sucedem um outro elemento.
7. Um exemplo de sucessão e predecessão pode ser dado utilizando o conjunto A (vide item 3.1.). Sendo A={a,e,i,o,u,y}={i,a,y,e,u,o}={e,a,o, u, y,i} tem-se, quando se considera a ordem alfabética, que 'e' precede 'u': $e \prec u$, o que tem como consequência $u \succ e$, isto é 'u' sucede 'e'.

2.2.1.- As Propriedades da Igualdade:

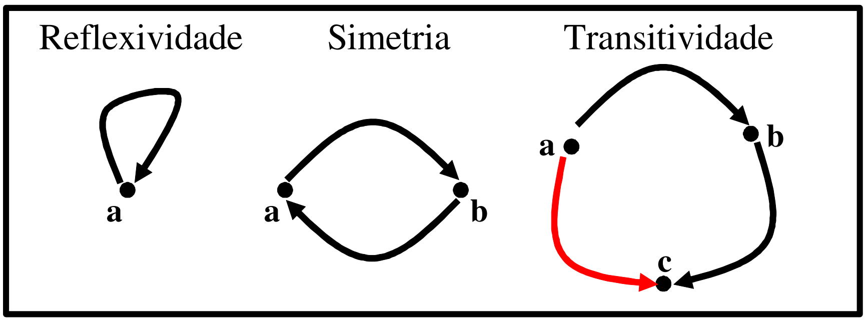
A seguir estão listadas as três propriedades da igualdade, onde os símbolos: "∀" deve ser lido como "para qualquer" ou "para todo", o símbolo "⇔" como "equivale" e o símbolo "⇒" deve ser lido como "se ...então":

[1] Reflexiva: $\forall a,\ a = a$

[2] Simétrica: $\forall a, \forall b,\ a = b \Leftrightarrow b = a$

[3] Transitiva: $\forall a, \forall b, \forall c, \forall b,\ (a = b \text{ e } b = c) \Rightarrow\ a = c$

A igualdade é uma relação de equivalência. As propriedades das relações de equivalência são mostradas abaixo sob a forma de grafos.



2.2.2.- As Propriedades da Desigualdade:

A desigualdade não é reflexiva nem simétrica, mas é transitiva, isto é: se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$; ocorrendo ainda que: se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

A desigualdade possui ainda, outras propriedades notáveis, a saber:

- Se $a > b$, $c > 0$ ou $c < 0$, então $a + c > b + c$
- Se $a < b$ e $c < 0$, então: $ac > bc$ (o sinal da desigualdade se inverte quando ela é multiplicada por qualquer número negativo).
- Veja ainda que: se $a > b$ e $c < 0$, então: $ac < bc$

- Se a < b e c > 0, então: ac < bc e ainda, se a > b e c > 0, então: ac > bc

2.3.- Valores-Verdade, Conectivos e os Quantificadores Lógicos

A Lógica Simbólica Matemática para facilitar o estudo de suas propriedades, utiliza um interessante conjunto de símbolos que podem ser também utilizados, e com vantagem, no dia-a-dia da Educação Matemática. Estes símbolos são os (1) *valores verdade* ou *valores lógicos*; (2) os conectivos; (3) os quantificadores.

As sentenças afirmativas podem ser lógicas ou lógico-matemáticas, como nos exemplos:

(1) “Paulo ama Maria”, “P depende de Q”; “A é pai de M” são sentença tipicamente lógicas.

(2) “3 é menor que 5”; “3 > 5”, “3 + 2 = 7” são sentenças lógico-matemáticas.

Toda sentença lógica ou lógico-matemática tem um valor verdade[7] ou valor lógico a saber: verdade = V ou falso = F. As sentenças lógico-matemáticas: “3 é maior que 5” tem para *valor verdade* o F, isto é “ 3 > 5 (F) ”, enquanto a sentença “3 é menor que 5” tem para valor verdade o V, isto é: “3< 5 (V)”, assim como “3 + 2 = 7” é falsa (F).

2.3.1.- Conectivos Lógicos

Os conectivos, como o próprio nome diz, são elementos que ligam sentenças (afirmações ou proposições) lógico-matemáticas.

Símbolo	***Nome***	***Leitura***
$\wedge$	**conjunção**	**"e"**
$\vee$	**disjunção**	**"ou"**
$\Rightarrow$	**implicação**	**"se ..., então ..."** *ou* **"implica"**
$\Leftrightarrow$	**equivalência**	**"... se, e somente se ..."** *ou* **"eqüivale"**

7 No caso de textos em inglês, os símbolos lógicos são *T = True e F = False*, sendo que em textos mais modernos, inclusive alguns em português, se utilizam os símbolos: $\top$ = *verdadeiro* (*True*) e $\bot$ = *falso (False)*.

2.3.1.1.- Exemplos de uso dos Conectivos Lógicos

(1) A sentença matemática: "**Se** x é maior ou igual a zero, **então** x é igual a zero **ou** x é maior que zero" escrita em linguagem simbólica ficará: $x \geq 0 \Rightarrow (x = 0 \ \vee \ x > 0)$.

Comentário: um número é maior que zero quando é positivo e, é denominado "nulo" quando for igual a zero; a condição "x maior ou igual a zero*" será satisfeita por uma e somente uma das alternativas*: "x é nulo" ou "x é positivo (não nulo)"

(2) "**Se** x vezes y é igual a zero, **então** x é igual a zero **ou** y é igual a zero" pode ser representada simbolicamente como: $x.y = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

Comentário: a expressão "x.y = 0" é satisfeita para x igual a zero e y diferente de zero, ou então: para o y igual a zero e o x diferente de zero; no entanto, se x e y forem simultaneamente zero, a condição será igualmente satisfeita.

(3) "x é maior que y **se, e somente se** y é menor que x" pode ser escrita sinteticamente como sendo:

$x > y \Leftrightarrow y < x$

(4) "**Se** x é maior que y **então** y é menor que x" pode ser escrita utilizando-se símbolos lógicos como: $x > y \Rightarrow y < x$

Comentário: A palavra "ou", no nosso dia-a-dia, é utilizada no sentido *exclusivo* como no caso do exemplo (1) em que se x for igual a zero ele não poderá ser maior que zero; no entanto na Matemática a palavra "ou" pode assumir o sentido inclusivo, isto é, satisfazer a cada uma das possibilidades ou a todas elas simultaneamente como em x.y.z = 0. Para ornar esta igualdade verdadeira há as seguintes sete possibilidades exclusivas: (1) somente x é nulo; (2) somente y é nulo; (3) somente z é nulo; (4) x e y são nulos e z é não nulo; (5) x e z são nulos e y não é nulo; (6) y e z são nulos e x não é nulo; e por fim: (7) x, y e z são todos nulos.

2.3.1.2.- Jogos Para o Pensamento Lógico-Aritmético:

A seguir uma série de exercícios está sendo assumida como uma série de pequenos Jogos Para o Pensamento Lógico-Aritmético, pois isto é o que eles exatamente são, conforme o leitor poderá facilmente perceber.

Analise cada uma das sentenças abaixo e diga se ela é verdadeira ou falsa justificando a sua resposta.

1. $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x + y > 0$
2. $x + y\ 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0)$
3. $x + y > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y < 0)$
4. $x + y > 0 \Rightarrow (x < 0 \wedge y < 0)$
5. $(x + y \geq 0) \Rightarrow (x \geq 0 \vee y \geq 0)$
6. $(x + y > 0 \wedge x = 0) \Rightarrow (y \geq 0)$
7. $(x + y > 0 \wedge x < 0) \Rightarrow (y > -x \Rightarrow y > 0)$

<u>Observação:</u> Normalmente −x é interpretado como sendo o posto de x. Assim se x= 5 o oposto de x será −5, por outro lado: –(–5) deve ser entendido como sendo o oposto de – 5, ou seja, –(–5) +5. Também podemos entender "–x" como "o valor de x com o sinal trocado", assim, –(–7) pode ser entendido como sendo "o valor –7 com o sinal trocado", ou seja, –(–7) = +7.

2.3.1.3.- Respostas Analisadas dos Jogos Para o Pensamento 3.3.1.2.

1. $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow x + y > 0$ - Verdadeira. Se dois números são positivos, então a soma deles é um número positivo.
2. $x + y\ 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y > 0)$ - Falsa. Para que uma soma seja positiva não há necessidade de que ambos os valores sejam positivos. Veja por exemplo que, para x = 10 e y = -4, tem-se 10 + (-4) = 6 0.
3. $x + y > 0 \Rightarrow (x > 0 \wedge y < 0)$ - Falsa. Tente criar um exemplo numérico para provar que esta afirmativa é falsa.
4. $x + y > 0 \Rightarrow (x < 0 \wedge y < 0)$ - Falsa. Pois a soma de dois números negativos quaisquer deverá resultar um número negativo.
5. $(x + y \geq 0) \Rightarrow (x \geq 0 \vee y \geq 0)$ - Verdadeira. Tente criar um exemplos que justifiquem a resposta.
6. $(x + y > 0 \wedge x = 0) \Rightarrow (y \geq 0)$ - Verdadeira. Pois a condição y > 0 satisfaz. Logo a hipótese y = 0 pode ser descartada, a palavra "***ou***" aqui é utilizada no sentido exclusivo, pois y não pode ser ao mesmo tempo positivo e nulo.
7. $(x + y > 0 \wedge x < 0) \Rightarrow (y > -x \Rightarrow y > 0)$ - Verdadeira. Como o x é negativo o y tem que ser um número positivo (y deve ser maior que zero), mas y tem que ter um valor maior do que o valor de x com o sinal trocado, isto é y > −x, o que implicaria em termos que ter um y positivo. Exemplo: se x = −4, y deve ser maior que −(−4), ou seja, o y deverá ser maior que o oposto de −4: y virá a ser maior que 4. Pense um pouco sobre isto.

2.4.- Os Quantificadores Lógicos

Símbolo	*Nome*	*Leitura*
$\forall$	**quantificador universal**	**"qualquer que seja"** ou **"para todo"**
$\exists$	**quantificador existencial**	**"existe um"** ou **"existe pelo menos um"**
$\exists\|$ **ou** $\exists!$	---	**"existe um único"** ou **"existe, e é único"**
$\sim\exists$, $\neg\exists$	**Negação do quantificador existencial**	**"não existe"**

2.4.1.- Exemplos

(1) $\forall x, x.0 = 0$ (é verdadeira para todos os valores de x: um número multiplicado por 0 é igual a 0)

(2) $\exists$ x, $x^2 = x$ (é verdadeira para x = 0 e x = 1)

(3) $\exists x, x + 3 = 7$ (é verdadeira para x = 4)

(4) $\exists|$ x, x = $\sqrt{9}$ (é verdade, pois somente x = 3 satisfaz; a raiz quadrada de um número positivo é um número positivo)

(5) $\exists|$ x, x.5 = 0 (é verdadeira, esta sentença matemática é válida somente para x = 0)

(6) $\sim\exists$ x, 0.x = 5 (é verdadeira, pois qualquer x multiplicado por zero resultará zero e nunca cinco).

2.4.2.- Contra- Exemplos:

(1) $\forall x, x^2 > x$ (É falso, pois não vale para x = 0 ou para x = 1, portanto não vale para todo x)

(2) $\exists$ x, x + 1 = x (É falso.)

(3) $\exists|$ x, $x^2 = x$ (É falso. Veja o exemplo 2 em 2.1)

(4) $\sim\exists$ x, $x^2 = 1$ (É falso. Pois x = 1 ou x = -1 satisfazem à sentença.)

2.4.3.- Jogos Para o Pensamento Lógico-Aritmético

Dar o valor lógico (V -verdadeiro ou F -falso) das sentenças abaixo justificando suas respostas. Considere x pertencente ao conjunto dos números naturais (**N** = {0,1,2,3,4,5,...})

(a) $\exists\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = x$ ( )	(b) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = x$ ( )
(c) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 \le x$ ( )	(d) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = 0$ ( )
(e) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ \frac{x}{5} = 0$ ( )	(f) $\forall x \in \mathbf{N},\ \frac{x}{5} = 0$ ( )
(g) $\exists\ x \in \mathbf{N},\ \frac{x}{5} = 0$ ( )	(h) $\forall x \in \mathbf{N},\ x.0 \le x$ ( )
(i) $\forall x \in \mathbf{N},\ x.0 = 0$ ( )	(j) $\forall x \in \mathbf{N},\ x \le x + 1$ ( )
(l) $\neg\exists\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = x^3$ ( )	(m) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = 9$ ( )

2.4.3.1.-Respostas Analisadas do Exercício 3.4.3.

(a) $\exists\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = x$ (V) (b) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = x$ (F) (c) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 \le x$ (F) (d) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 < x$ (F)

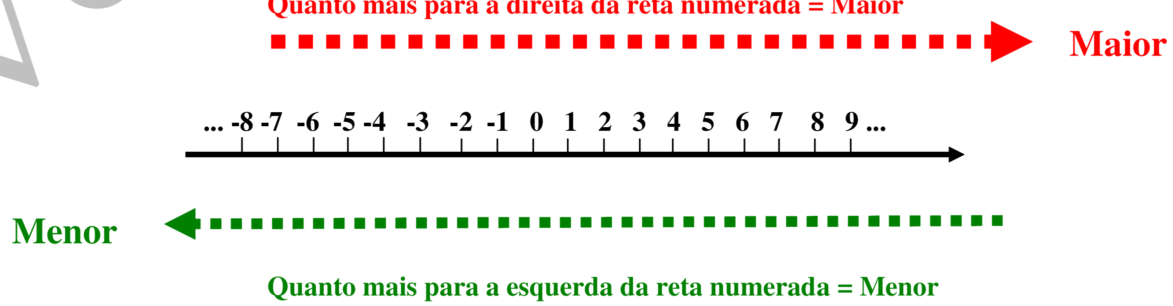
Justificativas:

(a) x = 1 ou x = 0 satisfazem, logo existe pelo menos um x em n que satisfaz à igualdade: $x^2 = x$.

(b) Falso. Pois há dois valores em **N** que satisfazem à relação: o 0 e o 1.

(c) Veja que o sinal ≤ não precisa ser satisfeito para o '<' e para o '=' , bastando satisfazer à igualdade ara que a expressão $x^2 \le x$ seja verdadeira. A sentença é falsa porque existem o 0 e o 1 satisfazendo a igualdade. Se a expressão fosse "$\exists\ x \in \mathbf{N},\ x^2 \le x$" ela seria verdadeira.

(d) Não existe em **N** nenhum número que elevado ao quadrado seja menor que ele mesmo. Veja: $2^2 = 4$ e $4 > 2$; mesmo para o zero e o 1 teremos: $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$, e não ocorre que $0 > 0$ nem que $1 > 1$. No entanto, quando podemos utilizar os números negativos a sentença passa a ser verdadeira, pois se $(-2)^2 = 4$ e $4 > -2$, por outro lado, ocorre que $(-2)^3 = -8$ e aí sim: $-8 < -2$.



<u>**Observar:**</u> O conjunto dos números inteiros é $\mathbb{Z} = \{\ 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm \ldots\}$

(e) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ \frac{x}{5} = 0$ (V) (f) $\forall x \in \mathbf{N},\ \frac{x}{0} = 0$ (F) (g) $\exists\ x \in \mathbf{N},\ \frac{x}{0} = 0$ (F) (h) $\forall x \in \mathbf{N},\ x.0 \leq x$ (V)

Justificativas:

(e) É satisfeita para x =0.

(f) É Falsa, não existe divisão por zero.

(g) Idem ao (f).

(h) É verdadeira apenas para os números naturais. Para os números inteiros negativos (-1,-2,-3,...) seria falsa.

(i) $\forall x \in \mathbf{N},\ x.0 = 0$ (V) (j) $\forall x \in \mathbf{N},\ x \leq x + 1$ (V) (l) $\neg\exists\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = x^3$ (F) (m) $\exists |\ x \in \mathbf{N},\ x^2 = 9$ (F)

Justificativas:

(i) É válida para todos os números naturais.

(j) Idem ao (j).

(k) É válida para x = 0 e x = 1. Não seria válida, por exemplo, para x = 2 ou mesmo para x = -1, pois $(-1)^2 = 1$ e $(-1)^3 = -1$.

2.4.4.- Números Pares e Números Ímpares

Há números pares e números ímpares em $\mathbb{N}$.

O conjunto dos Números Pares contido em $\mathbb{N}$ é dado por:

$$\{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\} = \mathbf{\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}}$$

O que se pode afirmar aqui é que 2n equivale a tabuada de multiplicar do 2 aplicada aos números naturais **0, 1, 2, 3, 4, 5**,..., como em:

$2 \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$; $2 \times \mathbf{1} = \mathbf{2}$; $2 \times \mathbf{2} = \mathbf{4}$; $2 \times \mathbf{3} = \mathbf{6}$; $2 \times \mathbf{4} = \mathbf{8}$; ... e assim por diante até o infinito.

O que pode ser mostrado de forma esquemática:

Geração dos Números Naturais Pares

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
$2\times n$ =	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22 ...

O conjunto dos Números Pares contido em $\mathbb{N}$ é dado por:

$$\{x \mid x = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \ldots\}$$

O que se pode afirmar aqui é que 2n equivale a tabuada de multiplicar do 2 aplicada aos números naturais **0, 1, 2, 3, 4, 5**,..., como em:

$2 \times \mathbf{0} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$; $2 \times \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{3}$; $2 \times \mathbf{2} + \mathbf{1} = \mathbf{5}$; $2 \times \mathbf{3} + \mathbf{1} = \mathbf{7}$; $2 \times \mathbf{4} + \mathbf{1} = \mathbf{9}$; ... e assim por diante até o infinito.

O que pode ser mostrado de forma esquemática:

Geração dos Números Naturais Ímpares

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
$2\times n+1$ =	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23 ...

2.4.4.1.- Jogos Para o Pensamento Lógico-Aritmético

Sendo C = {2, 4, 6, 9}, complete as sentenças a seguir com o quantificador conveniente:

(a) __ $x \in C$, x é um número par

(b) __ $x \in C$, x é um número ímpar

(c) __ $x \in C$, $x > 10$

(d) __ $x \in C$, $x < 10$

(e) __ $x \in C$, $x \neq 10$

(f) __ $x \in C$, $x = 10$

(g) __ $x \in C$, $x \in \mathbb{N}$

(h) __ $x \in C$, $x \neq 6$

(i) __ $x \in C$, $x < 9$

(j) __ $x \in C$, $x \leq 9$

2.4.4.1.- Respostas dos Jogos Para o Pensamento 3.4.4.

A melhor das respostas é assinalada na **cor vermelha**:

(a) ∃ (existe pelo menos um) (b) ∃ ou ∃| (c) ~∃ (tmesmo que: ¬∃) (d) ∀

(e) ∀ ou ∃ (f) ¬∃ (mesmo que: ~∃) (g) ∀ (h) ∃

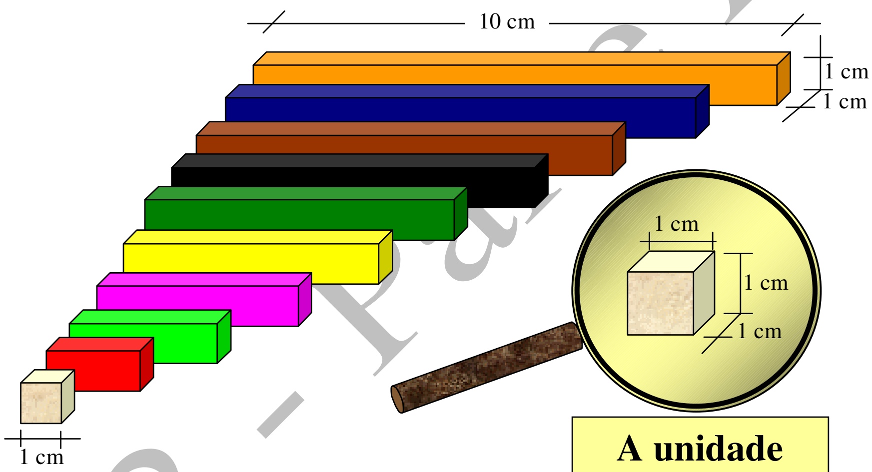
(i) ∃ (j) ∀ ou ∃

JARIT#03 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO #03

As Barrinhas de Cuisenaire

As Barrinhas Numéricas criadas por Cuisenaire e que foram divulgadas por Gategno (vide Prolegômenos) é um material de baixo custo que permite a introdução dos números (quantidades) e numerais através da régua numerada de 30 cm (aprendizagem dos símbolos hindu-arábicos) bem como permitem a concretização das operações fundamentais aritméticas.

3.1.- Introdução



Émile-Georges Cuisenaire, era um diretor de ensino da Bélgica, que expôs no livro intitulado "Les nombres en couleur" (Os números em cores), em 1953, suas idéias sobre o uso de um interessante material concreto para o ensino-aprendizagem da Aritmética. Este livro contém um notável texto psicopedagógico que introduziu de maneira definitiva um material que vem sendo denominado "Barrinhas de Cuisenaire" e que tem ampla utilidade no Ensino Básico.

Estas barrinhas que podem ser confeccionados em madeira, plástico ou material emborrachado com um perfil de 1 cm · 1 cm e cumprimentos que vão de 1 cm até 10 cm. A figura a seguir mostra cada um dos tipos destas barrinhas. Na ampliação, aparece o cubo correspondente à unidade.

A quantidade ideal de barrinhas necessárias para trabalhar com cada grupo formados por quatro crianças, com idades de 4 a 7 anos, deveria ser a seguinte:

Quantidade	Cor	Comprimento
50	madeira natural	1 cm
50	vermelha	2 cm
33	verde-claro	3 cm
25	lilás	4 cm
20	amarela	5 cm
16	verde-escuro	6 cm
14	preta	7 cm
12	marrom	8 cm
11	azul	9 cm
10	laranja	10 cm

Este conjunto de barrinhas permitirá às crianças a exploração do conceito lógico-matemático de número, bem como a introdução dos numerais de forma bastante natural e significativa a partir da contagem. Estes conceitos permitirão ainda, utilizando-se o mesmo material, a concretização das propriedades operatórias da adição, subtração, multiplicação e divisão – seja ela uma divisão inteira ou com resto –, bem como permitirá a introdução do conceito do cálculo de medidas de superfície – o cálculo da área de figuras planas.

O uso criterioso deste material facilita o trabalho do professor com crianças dos 4 aos 7 anos e dos 7 aos 11, nada impedindo que sejam utilizadas – até com muito êxito – no Ensino de Jovens e Adultos.

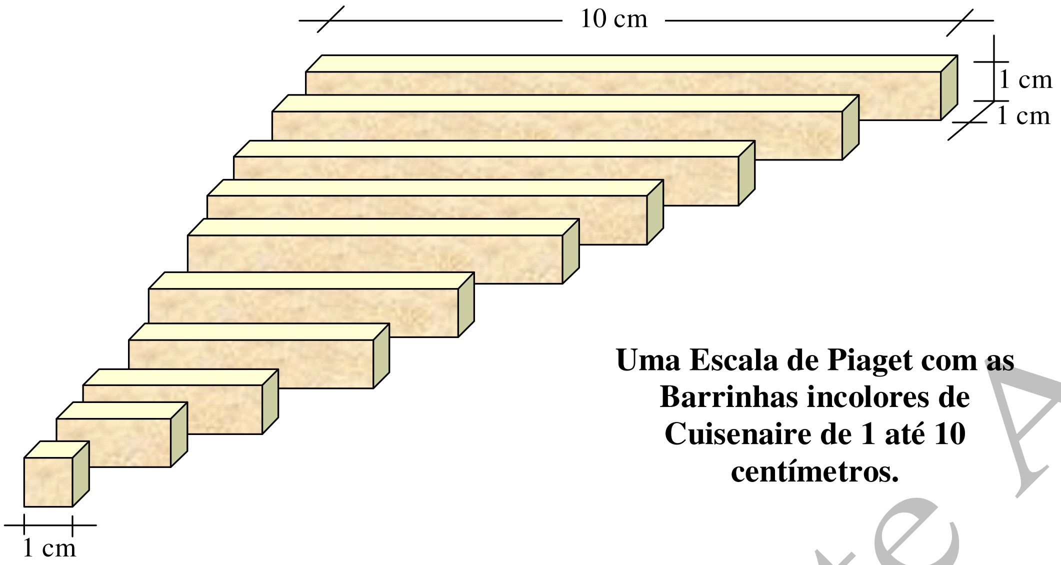
3.2.- Confeccionando o Material

Os professores habilidosos, com facilidade ou com gosto para o trabalho em madeira, poderão confeccionar este material a partir de sarrafos de madeira, adquiridos numa serraria, cuja largura e espessura meçam exatamente 1cm × 1cm. Deve-se cortá-los nas medidas especificadas, podendo em seguida, tingi-los com anilina. No entanto, este seria um trabalho de grande envergadura para aqueles que trabalham com salas com às vezes 40 alunos. Ele teria que confeccionar 10 conjuntos de barrinhas, o que seria além de dispendioso financeiramente, dispendioso em termos de tempo e exigiria paciência. A sorte é que estas barrinhas são encontráveis à venda, sejam confeccionadas em madeira, em plástico e até mesmo em material emborrachado, o EVA – Edil Vinil Acetato, que é encontrado em placas de diversas cores nas lojas de artesanato.

3.3.- Barrinhas Monocromáticas de Cuisenaire

Muitos professoras e professores que frequentaram cursos de atualização por mim ministrados que envolveram, entre outros materiais, a utilização das Barrinhas de Cuisenaire, acabaram confeccionando os seus próprios conjuntos de barrinhas. Ainda, segundo a minha sugestão, alguns deles não tingiram com anilina as suas barrinhas e passaram a utilizá-las na cor natural da madeira. Muitos relataram que o material “funcionava” a contento e que eles se surpreendiam com a rapidez com que as crianças passavam a identificar os diversos tamanhos e a relacioná-los com os números e os numerais a elas correspondentes.

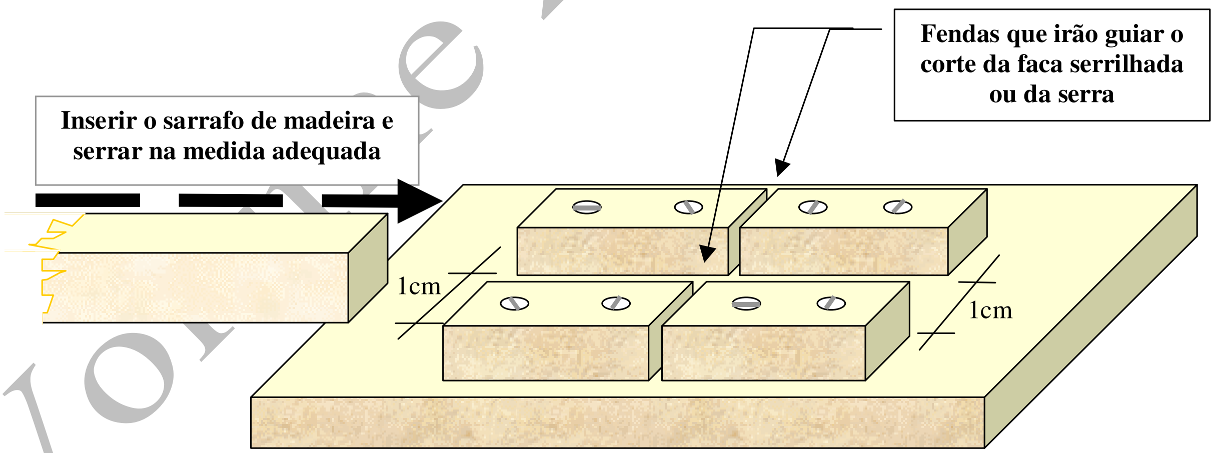
Na verdade pudemos verificar que as Barrinhas Monocromáticas (Incolores) de Cuisenaire eram tão ou mais eficientes que as Barrinhas Coloridas de Cuisenaire.



Uma Escala de Piaget com as Barrinhas incolores de Cuisenaire de 1 até 10 centímetros.

Na figura a seguir é mostrado um suporte que permite cortar com maior facilidade as barrinhas de madeira nas medidas requeridas.

A base do suporte poderá ser feito em madeira e os guias laterais – de preferência com alturas um pouco menor que 1 cm – poderão ser confeccionados em madeira ou até mesmo utilizando-se perfis de alumínio. Estes guias, se de madeira deverão ser colados e possivelmente parafusados à base do suporte para maior segurança. No caso de perfis de alumínio eles poderão ser parafusados à base, o que já será suficiente.



Material necessário para a elaboração das Barrinhas Incolores de Cuisenaire:

- *sarrafos de madeira com perfil de 1cm × 1cm*
- *uma faca serrilhada (como aquelas de cortar pão) ou serrinha manual*
- *um suporte para o corte das barrinhas*

3.4.- Planibarras de Cuisenaire

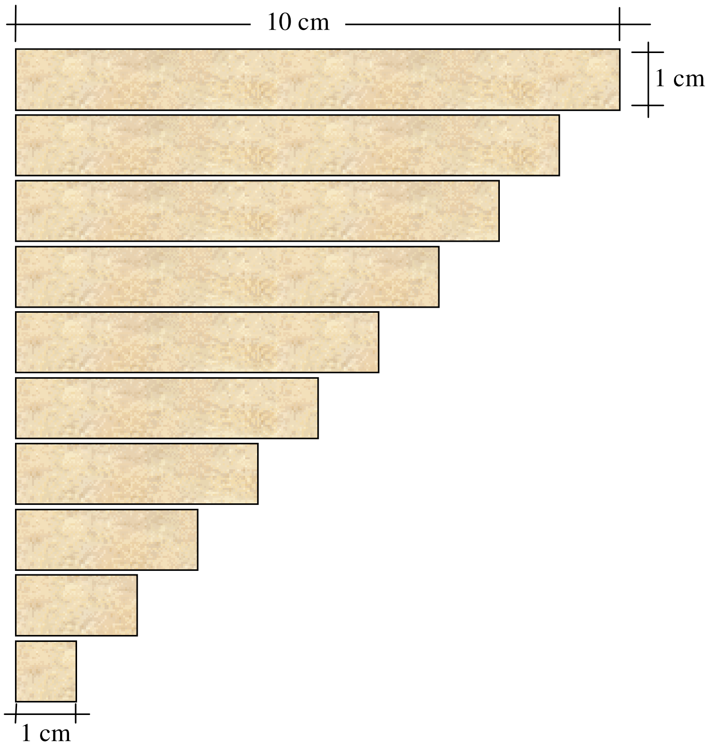
Além das Barrinhas Monocromáticas, podem ser utilizadas, com alguma vantagem, as aqui denominadas Planibarras de Cuisenaire. Elas podem ser confeccionadas usando-se palitos de sorvete ou então placas planas de material emborrachado (EVA– Edil Vinil Acetato).

O conjunto das Planibarras é um material pedagógico desenvolvido a partir de alguns dos conceito que subjazem no conhecido material pedagógico Barrinhas de Cuisenaire. No entanto, é um material de fácil confecção, confecção esta que pode ser levada a efeito pelos professores, mas que podem ser confeccionadas pelos próprios estudantes – quando eles tenham idade suficiente para fazê-lo sem riscos e em local apropriado – fato este que tornaria o processo de aprendizagens muito mais amplo e interessante.

As Planibarras são de mais fácil confecção do que as barrinhas, propriamente ditas, no entanto, a perda de uma das dimensões faz com que o material não possa ser empregado em construções espaciais impossibilitando a concreção do conceito de volume de sólidos geométricos.

3.4.1.- Planibarras Construídas com Palitos de Sorvete

A figura a seguir mostra as Planibarras Monocromáticas de Cuisenaire confeccionadas com palitos de sorvete

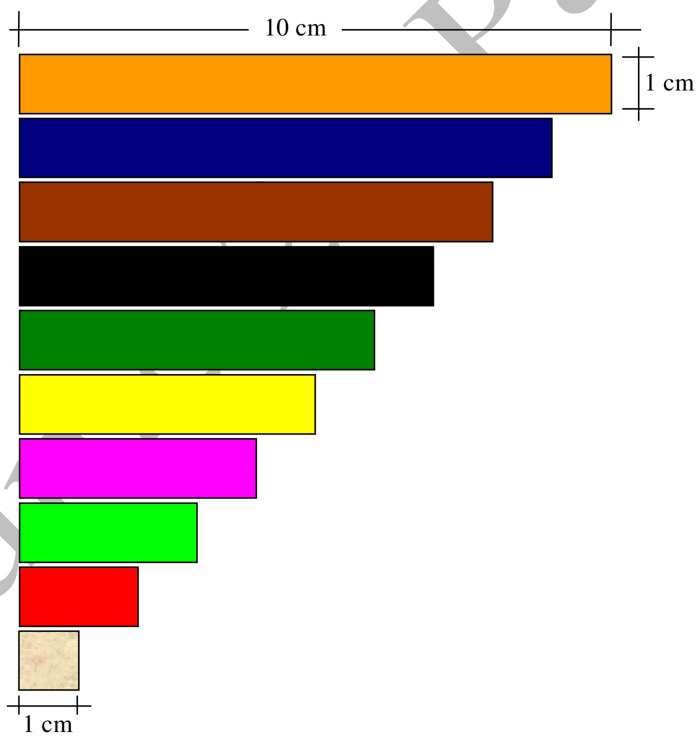


Material necessário para a construção das Planibarras de Cuisenaire:

- ***palitos de sorvete com 1 cm de largura***
- ***uma faca serrilhada (como estas de cortar pão)***
- ***um suporte para o corte das barrinhas***

3.4.2.- Planibarras de Borracha EVA

As Planibarras de Cuisenaire a serem confeccionadas com o material EVA trazem consigo uma dificuldade: encontrar as placas daquele emborrachado em todas as cores necessárias para a corretas disposição das mesmas.



Material necessário:

- ***placas de material EVA nas cores requeridas***
- ***uma régua metálica***
- ***uma estilete para realizar os cortes***

3.5.- Utilização inicial do material

Segundo Piaget o conceito de número se desenvolve ao longo das idades que vão dos 4 aos 7 anos. Mas, as Barrinhas de Cuisenaire podem ser utilizadas muitíssimo antes das crianças possuírem de forma definitiva o conceito de número, ou seja, o conceito da conservação da quantidade de objetos, independente da disposição dos mesmos (vide item 1.3.1.3. dos Prolegômenos), para exatamente, auxiliá-las neste processo. Inicialmente, a utilização das Barrinhas permitirá à criança a exploração dos conceitos de correspondência biunívoca, classificação, sequenciação e ordenação. A estes conceitos, ao se dar continuidade à exploração metódica das possibilidades oferecidas pelas Barrinhas de Cuisenaire, seguem os de igualdade, desigualdade, paridade (verificação de que se um número inteiro é par ou ímpar), operações de adição, subtração, multiplicação, divisão exata, divisão com resto, e tudo isto, como já se afirmou, sem que a criança tenha ainda totalmente formada a noção de número.

A seguir serão introduzidos, sob a forma de atividades lúdicas, os primeiros passos orientadores sobre o uso deste material. Para isto, além do conjunto das barrinhas, deve-se ter em mãos:

[1] Folhas de papel sulfite branco com espessura de 90g/m2 ou maior

[2] Folhas de papel quadriculado - com quadrículas de 1 cm por 1 cm, também conhecido como papel pedagógico.

[3] Uma régua graduada em centímetros.

[4] Barrinhas de Cuisenaire em EVA Imantadas

[5] Placa de metal para adesão das barrinhas imantadas

[6] Tesouras escolares (sem ponta)

[7] Prendedores de roupa de plástico ou de madeira

[8] Cartões medindo 4cm × 4cm coloridos com as cores da Barrinhas de Cuisenaire (deixar um cartão em branco para representar a barrinha de madeira natural)

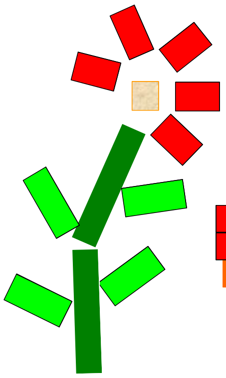
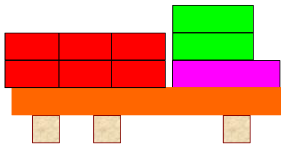
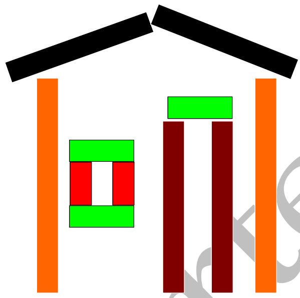
[9] Barbante grosso ou cordinha de náilon na cor branca

[10] Saquinhos bem pequenos de lixo na cor preta e opacos (saquinhos para 10 quilos ou menos) ou sacolinhas de tecido espesso e não transparente

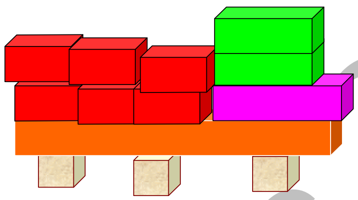
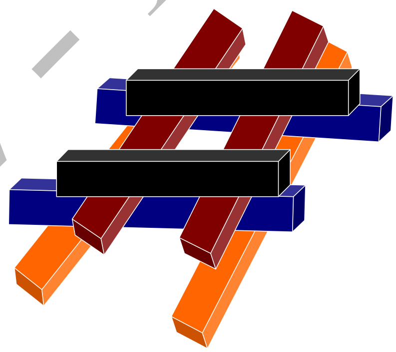
As atividades sugeridas a seguir não estão necessariamente na ordem de aplicação, cabendo ao educador verificar, na prática, a conveniente ordenação das mesmas.

3.5.1.- Atividade Nº 1: Composições planas

A criança, manipulando as barrinhas, poderá construir composições planas representando: flores, árvores, trenzinhos, automóveis, homenzinhos, carinhas, animais etc, de acordo com sugestões dadas na lousa imantada pelo educador. Devem ser estimuladas construções criadas pelas próprias crianças e o educador deve reproduzir na lousa imantada os desenhos que achar mais interessante.

Às construções planas geralmente seguem as construções tridimensionais, espaciais, como: pilhas, fogueirinhas, muros etc, normalmente descobertas pelas próprias crianças.

NOTA IMPORTANTE:

Há várias outras a atividades complementares à Atividade Nº 1 todas elas baseadas no conceito de Correspondência Biunívoca ou Um-a-um, que são sugeridas a seguir.

3.5.1.1.- Cobrir e Pintar

Uma atividade muito interessante – que permite estabelecer correspondências entre as barrinhas e o desenho –, consiste em se fornecer às crianças desenhos já prontos elaborados previamente com as exatas medidas das barrinhas, monocromáticos, mimeografados ou xerocopiados, para que elas cubram cada parte do desenho com uma barrinha e em seguida, retirando as barrinhas, pintem o desenho de acordo com as cores correspondentes.

3.5.1.2.- Copiar as Composições e Colorir os Desenhos Obtidos

Uma atividade já um pouco mais complexa que a anterior, será a da cópia, pelas crianças, em papel sulfite, das composições elaboradas por elas, onde as barrinhas serão utilizadas como moldes para serem contornadas com o lápis preto, seguida da tarefa de colorir, ou pintar os desenhos, de acordo com as cores das barrinhas utilizadas.

3.5.1.3.- Colorir, Recortar e Colar

Tendo por base a composição feita pela criança, usando o papel quadriculado, desenhar e pintar as barrinhas que foram utilizadas na montagem da composição, para em seguida, recortá-las e dispô-las sobre uma folha de papel sulfite formando o desenho correspondente ao da montagem. Colar os recortes sobre a folha.

Observação Importante:

O educador deve manter na sala de aulas um varal – um fio com mais ou menos três metros de comprimento preso a dois pregos –, onde deverá dependurar os trabalhos concluídos naquela aula usando os prendedores de roupa.

3.5.2.- Atividade Nº 2: Jogando no chão da sala de aulas

Usar os cartões medindo 4cm X 4cm e coloridos, de acordo com as cores das barrinhas, para propor às crianças que estabeleçam correspondência entre as cores das barrinhas e as dos cartões coloridos. Para tal, colocar no chão – serve a sala de aulas ou o pátio coberto da escola –, quatro ou cinco círculos formados com barbantes e etiquetados, cada um deles, por um dos cartões coloridos. O educador deve misturar bem as barrinhas distribuindo-as em saquinhos de lixo ou em sacolinhas de tecido não transparente e as entrega às crianças. Então ordenadamente, uma a cada vez, deve retirar uma barrinha e colocá-la num dos círculos de acordo com a cor.

Haverá barrinhas que não servirão em nenhum dos quatro ou cinco círculos, e deverão ser dispostas fora dos círculos.

Com relação à quantidade de círculos a serem dispostos no chão, o professor pode aumentar ou diminuir esta quantidade; colocar em cada um dos círculos uma ou até mais do que uma etiqueta, sendo que neste círculo serão aceitas barrinhas de duas ou três cores, mas sempre de acordo com as etiquetas. O educador pode utilizar todas as dez cores ou acrescentar outras cores distintas das dez cores das barrinhas. Os círculos que ficarão "vazios" são os "conjuntos vazios". Treinar com as crianças o reconhecimento das cores pelo nome, utilizando as barrinhas.

Outra alternativa para este jogo é a utilização, ao invés de etiquetas contendo as cores, fazê-las tão somente com os valores numéricos das barrinhas.

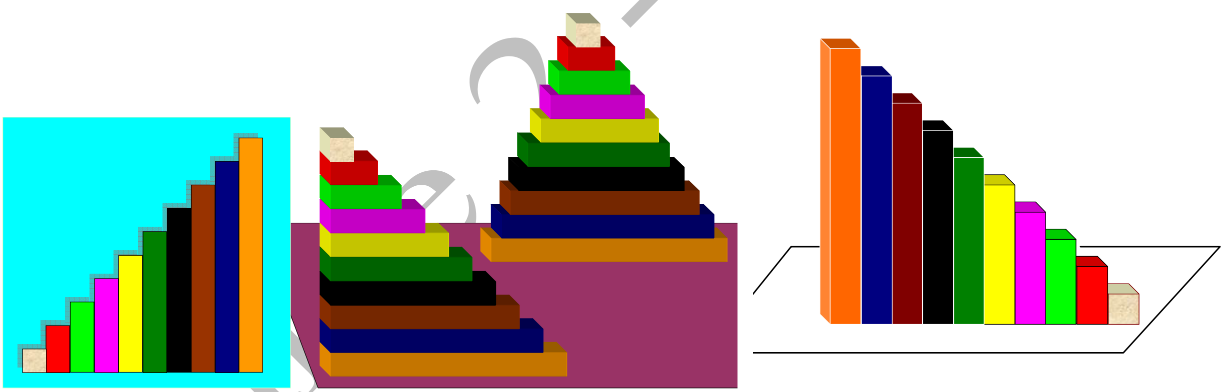
3.5.3.- Atividade Nº 3: Comparando barrinhas

O educador deve escolher e apontar (ou mostrar) uma barrinha e solicitar que as crianças digam todas as barrinhas que são menores que a barrinha apontada. Quais são as maiores que a barrinha apontada.

Observação importante:

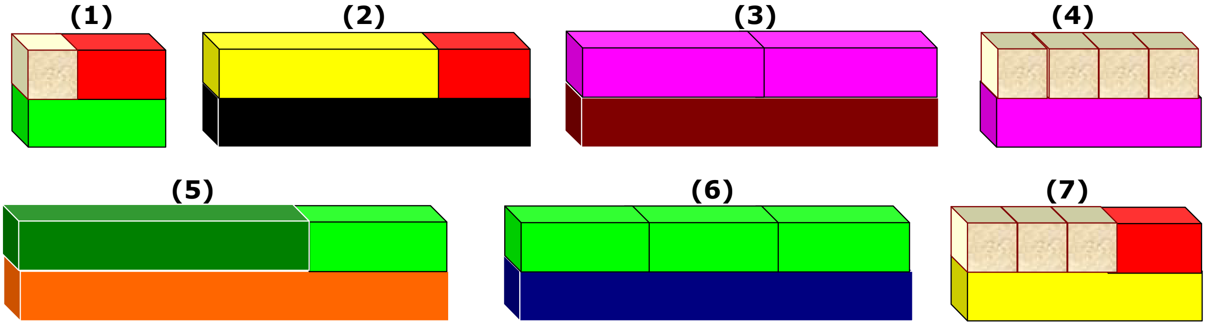
Esta atividade, que deverá ser repetida ao longo de alguns dias, deverá fazer com que algumas crianças acabem por ordenar completamente as barrinhas chegando à escala denominada Escala de Piaget (vide figura a seguir). A figura mostra a Escala de Piaget Planar, em que as barrinhas são alocadas lado a lado no plano, e a Escala de Piaget Tridimensional, em que as barrinhas são sobrepostas formando uma torre, ou colocadas lado a lado formando uma espécie de cerca.

O educador não deve, em hipótese alguma, forçar esta descoberta, ela deve ser naturalmente aguardada como uma comprovação de que um passo extremamente importante foi dado pela criança.



3.5.4.- Atividade Nº 4: O jogo da troca de barrinhas

O educador embaralha bem e distribui as barrinhas entre ele e as crianças que irão jogar. Ele propõe a troca de uma de suas barrinhas por duas barrinhas das crianças, de tal forma que as duas barrinhas de cada uma das crianças perfaçam juntas a mesma extensão da barrinha por ele apresentada - vide os exemplos (1), (2), (3) e (5) na figura a seguir . Todos devem participar dos debates justificando se as trocas propostas estão corretas ou não. O jogo pode se inverter com cada uma crianças propondo a destroca de suas barras por cada duas que elas mesmas devem escolher entre as barrinhas que estão de posse do educador.



Após as crianças terem dominado bem os aspectos do jogo, o educador pode propor a troca de uma de suas barras por três barrinhas de cada criança – vide exemplo (6) na figura acima.

Uma variação importantíssima deste jogo é a troca de uma barrinha por duas que devam ser exatamente iguais – vide exemplo (3) na figura acima. Aqui a criança verificará que a troca de uma barra por um *par* de outras barras a ela equivalente poderá ou não ter solução. As barras que possam ser trocadas por um par de barrinhas de mesma cor serão denominadas *"barrinhas par",* as que não puderem ser trocadas por duas outras de mesma cor serão denominadas *"barrinhas ímpar"*. O conceito de que as duas barrinhas colocadas sobre a barra maior "partem" a barra maior exatamente ao meio introduz o conceito de meio e metade e 'dobro de'.

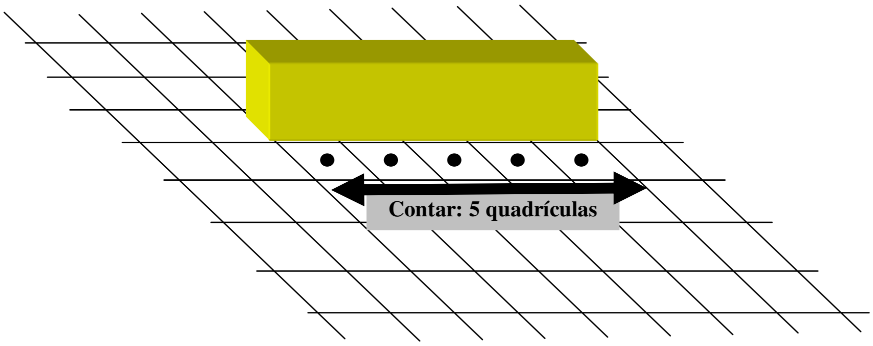
Pode-se estudar com as crianças todas as possibilidades de troca por duas, três, quatro etc, barrinhas por uma barrinha apontada pelo educador– vide exemplos (4), (6) e (7) na figura acima.

Observação importante:

As possíveis trocas entre barrinhas podem ser empilhadas sob a forma de um murinho de tal forma que a barra apontada pelo professor, a maior delas, fique exatamente na base do muro. Aqui pode-se introduz o conceito de comutatividade: "a barrinha lilás mais a barrinha a branca é igual à barrinha branca mais a barrinha lilás".

3.5.5.- Atividade Nº 5: Usando o Papel Quadriculado

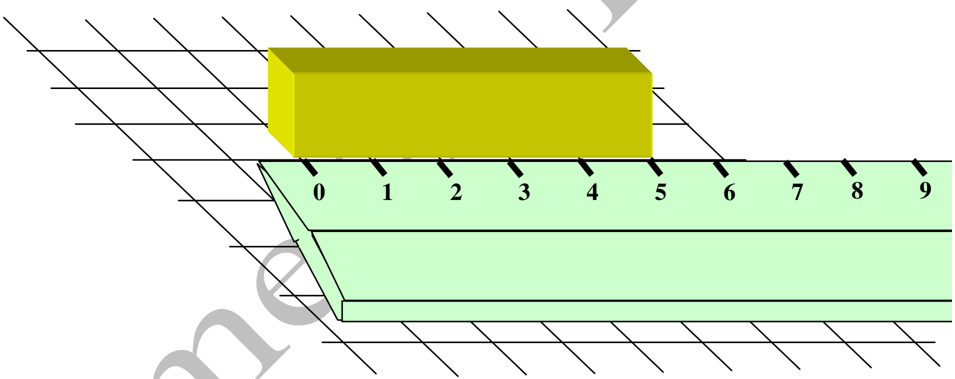
Para as crianças que já "decoraram" a contagem de 1 até 10, pode-se agora solicitar a elas que, utilizando o papel pedagógico, passem a "medir" as barrinhas. Para isto elas devem assentar sobre as quadrículas do papel quadriculado, de forma bem definida, uma das barrinhas, para em seguida contar quantos "quadradinhos" a barrinha está ocupando ou cobrindo. Assim, estaremos introduzindo o conceito de número (quantidade) de forma bastante natural através da contagem. Não se deve passar para a atividade número seis sem que e identificação das barrinhas pelo valor (número) esteja muitíssimo bem fixada. O professor deve fazer testes exaustivos para verificar se a criança identifica cada barrinha pelo respectivo número.



3.5.6.- Atividade Nº 6: Usando uma Régua Graduada

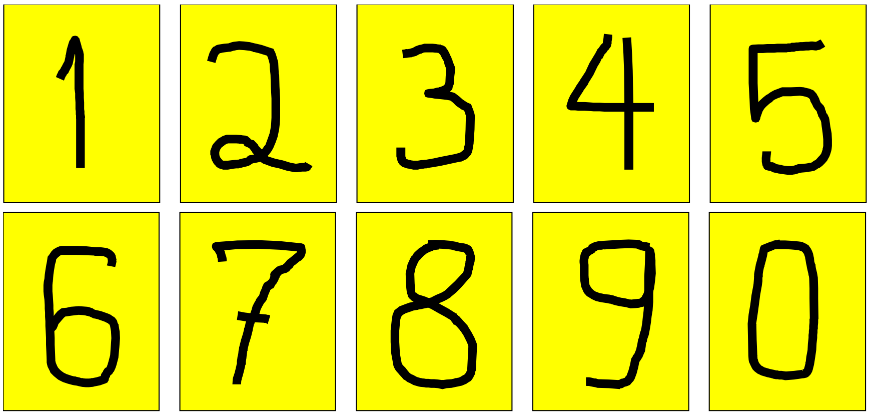
A introdução dos símbolos correspondentes aos números – os numerais –, podem ser introduzidos através do uso de uma régua graduada (em centímetros) e numerada.

A criança deve posicionar a régua como na figura e verificar qual é o símbolo correspondente à reguinha que ela já identificou, por exemplo, como “cinco“ na etapa anterior, a atividade número 5.

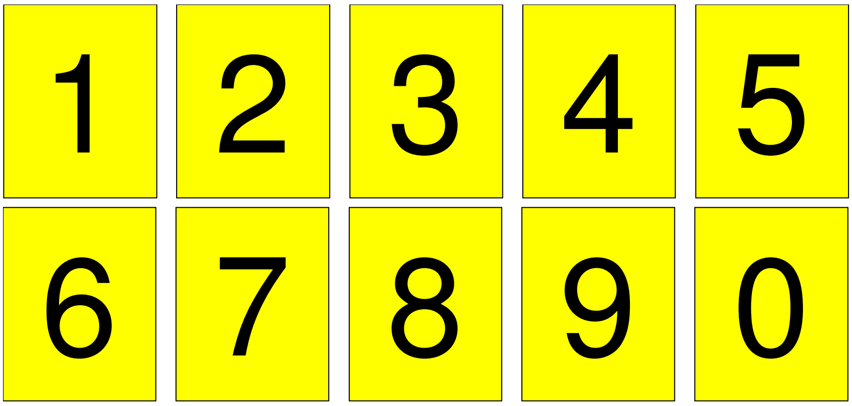


Sugere-se que todas as barrinhas sejam medidas tanto com o auxílio da régua e papel quadriculado quanto somente com a régua, assim que as crianças tiverem fixado os valores de cada reguinha (o número a que elas correspondem).

Sugere-se ainda que o trabalho de fazer a correspondência biunívoca entre numerais e as Barrinhas de Cuisenaire deva ser incrementado com o uso de etiquetas que mostre tanto a escrita cursiva como a escrita em letra de imprensa dos numerais, como nos exemplos a seguir:



Numerais hindu-arábicos em desenho cursivo.



Numerais hindu-arábicos em letra de imprensa.

Observação importante:

Os Prolegômenos deste livro traz idéias bastante interessantes no item 1.4.9. sobre a forma pedagogicamente correta de se ‘desenhar’ os numerais hindu-arábicos. Muito útil também se mostrará o matéria apresentado no item 1.4.4.7. e 1.4.4.8. dos Prolegômenos que fala sobre a escrita e decomposição dos grandes números (centenas e milhares) para os professores que queiram prosseguir daqui, associando as Barrinhas de Cuisenaire ao Material Psicoaritmético de Montessori.

3.6.- As Barrinhas de Cuisenaire e as Operações Aritméticas

Cabe ao educador(a) atento(a) observar rigorosamente se:

- ***As crianças já passaram por todas as atividades previstas anteriormente, ou seja, já dominam muitíssimo bem o conceito de número e o de numeral;***
- ***Dominam com perfeição a escrita e a leitura dos numerais hindu-arábicos, para somente então, passar para as atividades a seguir indicadas.***

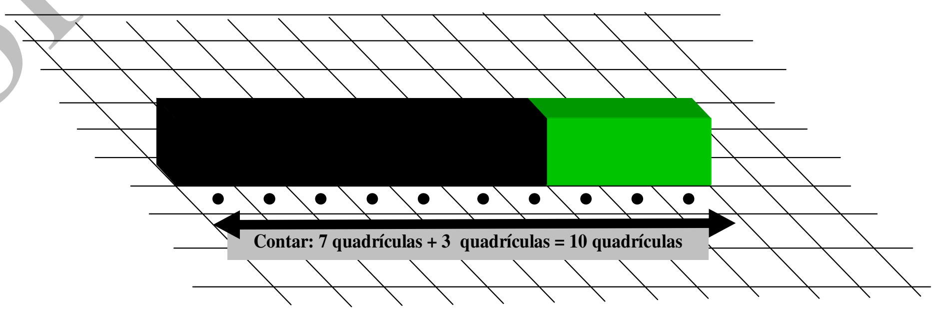
3.6.1.- Atividade Nº 7: Introduzindo o Conceito de Adição

Inicialmente vamos dar algumas idéias sobre o que seja a adição de dois números naturais e em seguida mostrar como esta operação pode ser concretizada usando-se as Barrinhas de Cuisenaire.

Seja considerar duas formas de representação das "continhas" de adicionar, seja na forma "indicada" ou através de um "dispositivo prático". Reforça-se aqui, a título de alerta bastante enfático, que a operação é denominada adição, que os elementos que estão sendo adicionados (ou somados) são as parcelas e o seu resultado é a soma ou total. Não está errado, mas não é conveniente dizer: "somar dois números", mas "adicionar dois números". É correto se referir ao resultado desta operação como: "a soma de dois números é..." ou "a adição de dois números resultou", nunca deve ser dito: "a adição de dois números é...".

Indicação:	**Dispositivo Prático:**	**Nomenclatura:**
7 + 3 = 10	**7 +** **3** **10**	**parcela +** **parcela** **soma** **(ou total)**

Para mostrar concretamente como se realiza uma adição utilizando as Barrinhas de Cuisenaire, deve-se proceder da seguinte forma: tomar a barrinha correspondente à primeira parcela (a barrinha preta) unindo-a, em seguida, linearmente, à barrinha representativa da segunda parcela (a vermelha). A soma ou total poderá ser conferida utilizando-se o papel pedagógico (através da contagem da quantidade de quadrículas ocupadas pelas duas barrinhas) ou através da régua graduada (medindo-se a extensão total das duas barrinhas).



Pode-se propor a título de exercício de fixação ou de verificação da aprendizagem os seguintes "tipos" ou "modelos":

(a) ____ + 7 = 9 (b) 3 + ____ = 5 (c) 10 + 8 = _____ (d) ____ + 5 = 5

Muito cuidado: os exercícios sugeridos nesta etapa são meramente modelos. Caberá ao(à) educador(a) não somente encontrar outros modelos convenientes, mas dosá-los de forma que um novo modelo somente seja apresentado às crianças depois de muita exercitação e demonstração, por parte das crianças, do perfeito domínio da idéia envolvida naquele modelo.

A adição é comutativa, isto é: 7 + 3 = 3 + 7, isto deverá ser mostrado através da seguinte composição com as barrinhas:

3.6.2.- Atividade Nº 8: Introduzindo o Conceito de Subtração

O conceito de subtração pode ter três tipos distintos de enfoque como vai ser mostrado a seguir com o auxílio da figura:

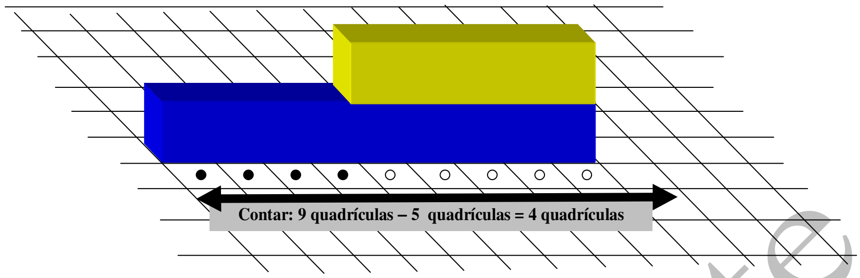
- ***tendo-se uma quantidade menor quanto falta para chegar em uma outra quantidade maior?***
- ***tendo-se uma quantidade maior e tirando-se (subtraindo-se) uma quantidade menor quanto sobra (qual o resto?) ?.***
- ***comparando-se uma quantidade maior e uma quantidade menor, ou vice versa, quanto a maior tem a mais que a menor (qual a diferença quanto a menor tem a menos que a maior?***

Indicação:	**Dispositivo Prático:**	**Nomenclatura:**
9 + 5 = 10	$\begin{array}{r} 9\ - \\ 5 \\ \hline 4 \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{minuendo} - \\ \text{subtraendo} \\ \hline \text{resto} \end{array}$ **(ou diferença)**

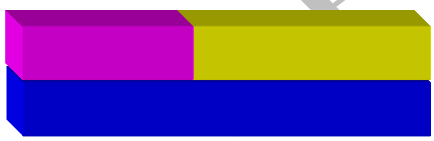
As situações-problema a serem apresentadas às crianças deverão levar em conta as idéias de "verificar o quanto falta", "subtrair e verificar o resto" e "qual a diferença entre". Assim a subtração" 9 – 5" poderá ser interpretada de três maneiras diferentes: "Quanto falta ao 5 para chegar em 9 ?", "5 mais quanto, resulta 9?" e "9 tirando 5, quanto sobra?".

A subtração deve ser introduzida como operação inversa da adição. A subtração serve para “desfazer” uma adição, pois, se 7 + 3 = 10 então 10 – 3 = 7 e 10 –7 = 3.

A seguir a concretização da subtração 9 – 5 é mostrada com a utilização das Barrinhas de Cuisenaire e o papel pedagógico. Veja como poderia ser explicada a operação inversa usando a mesma figura.



O professor deve utilizar a seguinte disposição entre as barrinhas – devendo permitir que a criança manipule o material e faça comparações utilizando tanto a régua, como o papel quadriculado –, e fazer as seguintes perguntas:



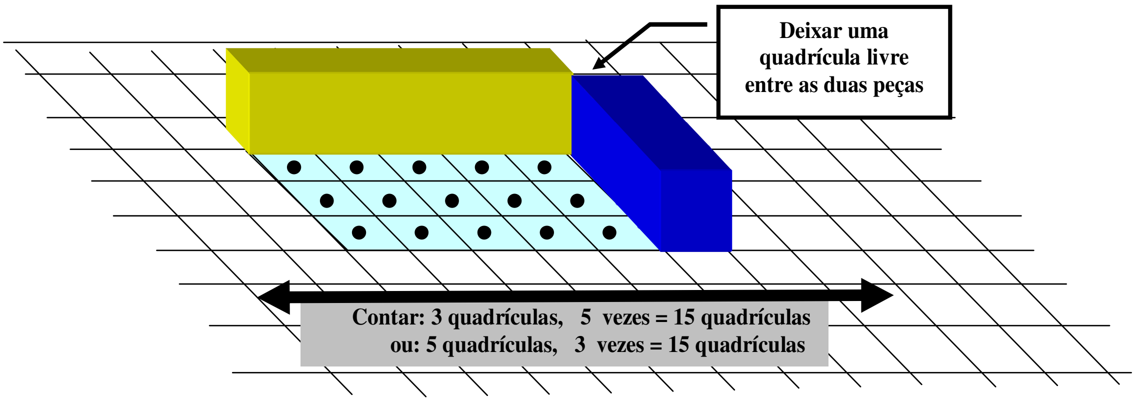
- *Quanto vale quatro mais cinco?*
- *Se eu tiver nove e subtrair (ou tirar) quatro, quanto resta?*
- *Se eu tenho quatro, quanto falta para chegar no 9?*
- *Se eu tenho Se eu tiver nove e subtrair (ou tirar) cinco, quanto resta?*
- *Se eu tenho cinco, quanto falta para chegar no 9?*

Outros exemplos devem ser testados até que a criança perceba todas as possibilidades de cálculo envolvendo a adição e sua operação inversa, a subtração.

3.6.3.- Atividade Nº 9: Introduzindo o Conceito de Multiplicação

Indicação:	**Dispositivo Prático:**	**Nomenclatura:**
3 × 5 = 15 ou 3 . 5 = 15	**5 × 3 ——— 15**	**multiplicando × multiplicador ———————— produto**
O multiplicando e o multiplicador são também chamados fatores.		

A multiplicação “3 × 5” é realizada da seguinte forma: deve-se dispor as barrinhas 3 e 5 sobre o papel quadriculado formando um ângulo de 90°, não se esquecendo de deixar uma quadrícula livre, tal como se pode ver na figura a seguir. Contar a quantidade de quadrículas da região limitadas pelas duas barrinhas. Há duas formas de fazer com que as crianças, numa primeira etapa, visualizam, muito bem, a região onde se deve contar as quadrículas: colocar tiras de papel auxiliando a visualização ou utilizando outras duas barrinhas exatamente iguais às anteriores colocadas nas quadrículas que foram assinaladas com pontos na figura abaixo. Note que uma quadrícula, entre as duas peças, ficou vazia.



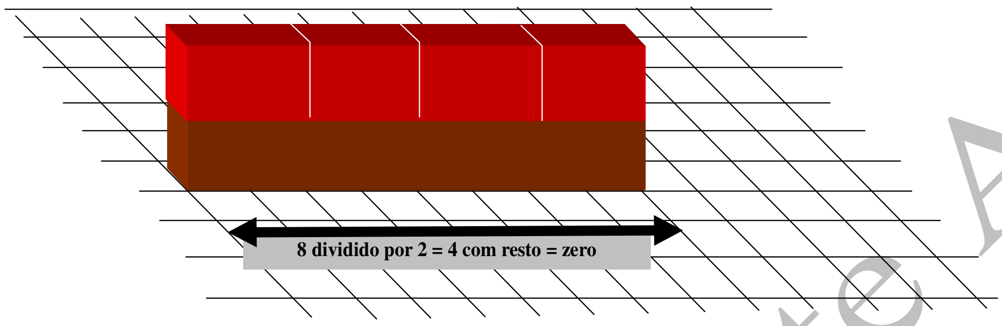
Deve-se aproveitar ainda este esquema de contagem de quadrículas de uma região para mostrar que na multiplicação vale a propriedade comutativa: $5 \times 3 = 3 \times 5$. Este método pode ser utilizado com vantagem para a concretização da tabuada e mais adiante para introdução da noção de área de figuras planas.

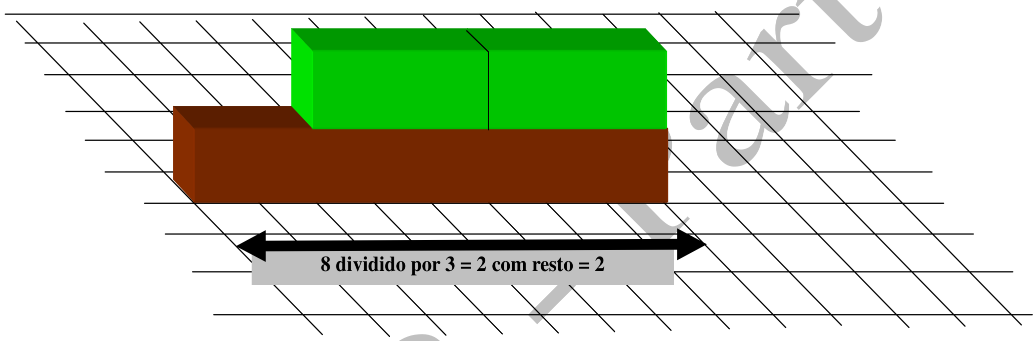
3.6.4.- Atividade Nº 10: Introduzindo o Conceito de Divisão

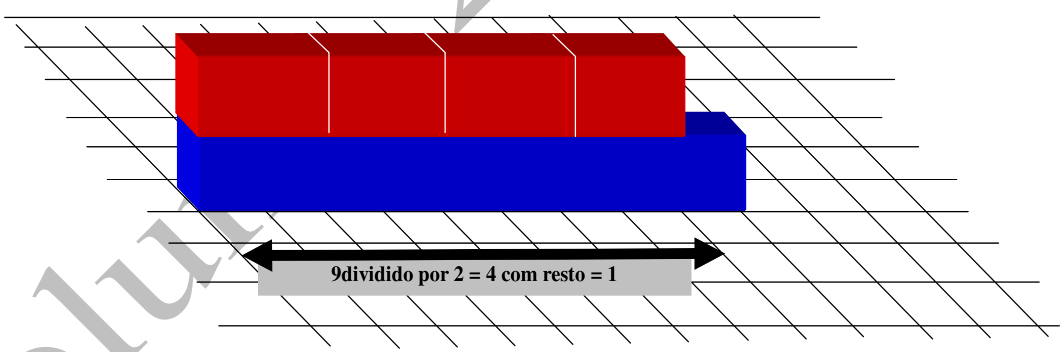
Indicação:	**Dispositivo Prático:**	**Nomenclatura:**
$8 \div 2 = 4$ ou $8 : 2 = 4$	$\begin{array}{r\|l} 8 & 2 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \textbf{Dividendo} & \textbf{Divisor} \\ \hline \textbf{...} & \textbf{Quociente} \\ \textbf{Resto} & \end{array}$

Observação: A divisão quando colocada na forma do dispositivo prático é geralmente denominada divisão euclidiana, pois este algoritmo da divisão foi criado por Euclides.

A divisão a ser inicialmente introduzida é a divisão exata, isto é com resto zero, para em seguida introduzir-se a divisão com resto. A seguir mostra-se em três exemplos, utilizando as Barrinhas de Cuisenaire, as divisões exatas e com resto.







3.7.- Conclusão

O material aqui apresentado, as Barrinhas de Cuisenaire, é um riquíssimo material didático que cria oportunidades excelentes para aprendizagem e compreensão dos números e numerais, as propriedades da igualdade e desigualdade, a noção de paridade e imparidade, bem como permite, de forma extremamente clara a concretização das operações aritméticas elementares e suas propriedades.

Introduzido na Pré-escola poderá ser utilizado no primeiro ciclo do ensino fundamental (de 1ª à 4ª séries) e também na quinta série do ensino fundamental quando se tornará um poderoso auxiliar na resolução de problemas numéricos e que envolvam o cálculo de áreas de figuras geométricas planas.

JARIT#04 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO #04

A Axiomatização da Aritmética e os Conjuntos Numéricos

Percebeu-se a partir dos meados do século XIX que a aritmética precisava ser organizada sob a forma de regras ou de princípios consistentes, isto é, deveria ser estruturada de forma axiomática. Giuseppe Peano não foi o primeiro a fazê-lo, mas sem dúvida foi quem lançou idéias teóricas vistas até hoje como extremamente claras. Por outro lado a aritmética foi estruturada a partir dos Números Naturais, mas há outros conjuntos numéricos importantíssimos que iremos estudar ao longo deste livro para os quais com algumas modificações valem a aritmética de Peano.

4.1.- Sobre os Axiomas

Dos dicionários podemos tirar, através de algumas adaptações, que 'axioma' é: *'uma regra, uma declaração ou princípio que é aceito como verdadeiro por maioria das pessoas; uma afirmação evidentemente universalmente reconhecida como verdadeira; um princípio auto-evidente aceito como verdade – sem a necessidade de ser provado como tal – para servir como base para outras afirmações ou argumentações mais amplas'*.

A melhor definição de axioma foi encontrada no Dicionário Houaiss*: premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável, originada, segundo a tradição racionalista, de princípios inatos da consciência ou, segundo os empiristas, de generalizações da observação empírica; num sistema ou teoria linguística, fórmula que se presume correta, embora não suscetível de demonstração.*

4.1.1.- Os Axiomas da Lógica Aristotélica

Um exemplo notável de um conjunto de axiomas (princípios) é devida a Aristóteles. Ele estabeleceu os três seguintes princípios (axiomas) da Lógica. Desde a antiguidade estes três 'axiomas' nortearam as operações das Lógicas com dois valores lógicos (V ou F), conhecidos também como *Princípios Semânticos*[8] *da Lógica Clássica,* ou seja, princípios que norteiam a validação de sentenças dentro da 'Lógica Aristotélica'.

[8] Semântica: ciência que estuda a evolução do significado das palavras e de outros símbolos que servem à comunicação linguística. Na Lógica: semântica é o estudo das relações entre sinais e símbolos, individualmente ou em grupamentos sentenciais, e o que eles representam em termos de significado linguístico.

4.1.1.1 – Princípio da Identidade:

Afirmativa	Símbolização
“O que é, é”	$p \Leftrightarrow p$

4.1.1.2 – Princípio da Não-Contradição:

Afirmativa	Símbolização
“Uma coisa não pode ser e não ser ao mesmo tempo.”	“$\neg(p \wedge \neg p)$”

Observação: a sentença $p \wedge \neg p$ é sempre falsa, isto é, ela é uma *contradição* ou um *absurdo*.

4.1.1.3 – Princípio no Meio Excluído ou Princípio do Terceiro Excluído:

Afirmativa	Símbolização
“Toda coisa deve ser ou não ser, não existindo um meio termo.” **“Toda coisa deve ser ou não ser, não existindo uma terceira possibilidade.”**	$p \vee \neg p$

4.1.1.4.- Comentários

- A partir dos meados do século XX outras lógicas foram criadas a partir da negação de um destes princípios – as Lógicas Não-Clássicas[9] –, tais como a ***Lógica Trivalorada ou Lógica dos Três Valores***, cujos valores podem ser: V, F ou ‘nem-V/nem-F’ que pode ser substituído por : ‘Talvez’cujos valores seriam: V = 1, F = 0 e Talvez = ½ ; a ***Lógica Fuzzy*** em que os valores lógicos podem variar numa escala contínua que vai do 0% até o 100%, isto para citar somente dois exemplos, que contariam o Terceiro Princípio; a ***Lógica de Crenças*** – em que os valores lógicos se baseiam naquilo que os indivíduos crêem, e não em valores verdade duais: V ou F –, esta lógica contraria o primeiro e segundo princípios.

- Para Aristóteles o Princípio do Não-Contradição era o mais importante, pois segundo ele, os outros dois seriam redutíveis a esse.

- Leibinitz (1646-1716) acrescentou aos princípios semânticos da Lógica Clássica mais um princípio, o quarto, por ele denominado Princípio da Razão Suficiente: “Todas as coisas devem ter uma razão suficiente pela qual são aquilo que são e não são outras coisas”. Assim, por

---

[9] Vide: *“An Introduction to Non-Classical Logic – From IF to Is.”,* by Graham Priest, Cambridge University Press, Second Edition, Reprinted with corrections edition: 2009.

exemplo, se tornam justificáveis perguntas tais como: "O que é suficiente para que um objeto seja considerado uma cadeira, e não uma banqueta?"; "O que é necessário para que um animal seja considerado uma ave?"; "O que é necessário e suficiente para que uma pessoa possa dirigir um automóvel?"

4.2.- Sobre os Teoremas

Teorema é uma afirmação que pode ser demonstrada como verdadeira através de argumentações e operações matematicamente aceitáveis. Em geral um teorema é o enunciado de algum princípio geral que faz parte de uma teoria. O processo que visa mostrar que o Teorema é verdadeiro se denomina prova. Philip J. Davis e Reuben Hersh, em seu livro "A Experiência Matemática" [Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985 – pág. 46-47], afirmam que cerca de 200.000 teoremas da matemática são publicados anualmente.

4.3.- A Axiomatização da Aritmética

Desde a antiguidade e entre os mais diversos povos, os números naturais: 0,1,2,3,4,5,6,..., são por excelência os números destinados à contagem. Historicamente o número zero, o "nada" apareceu muito depois dos outros, e o seu numeral − um círculo sem nada dentro −, deveria ter representado um continente sem nenhum conteúdo, nenhum elemento em seu interior – como um cercado em um campo, mas sem animais, ou uma cesta, sem nenhum pão, por exemplo.

Mas saber apenas isto sobre este tipo de números é muito pouco, e já no final do século XIX e na primeira metade do século XX o estudo das propriedades dos números naturais começou a preocupar os matemáticos.

Em resumo, como entidade matemática, o conjunto dos números naturais precisava ser formalizado e, assim foi que, Giuseppe Peano (Itália - 1858/1932) elaborou a Teoria Axiomática dos Números Naturais − e em 1889 Peano publicou um pequeno livro em latim intitulado *"Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita" mais conhecido como* "*Princípios de Aritmética"*. Neste texto, Peano menciona os estudos feitos por Boole, Schröder, Peirce, Jevons e MacColl, no campo da lógica e menciona os trabalhos de Dedekind publicado em 1888, reconhecidamente a primeira axiomatização da aritmética. No prefácio de seu livro, Peano introduz a notação lógica que irá utilizar no texto.

4.4.- Uma Axiomatização Equivalente aos Axiomas de Peano

Os axiomas de Peano estruturam as propriedades aritméticas dos números naturais, cujo conjunto é dado por: $\mathbb{N}$= { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,...}. Peano não somente enunciou os axiomas, como

também definiu as operações de adição e multiplicação e provou alguns teoremas que tomavam por base estes axiomas e definições.

Existem muitas axiomatizações distintas, mas equivalentes, à Axiomatização da Aritmética de Peano, onde a escolha dos símbolos distintos daqueles escolhidos por Peano é que fazem a maior diferença. Escolhemos uma entre muitas destas axiomatizações equivalentes à de Peano, que nos permitirá estudar de forma bastante concreta o que sejam as propriedades desta estrutura.

A formulação a seguir tem quatro noções primitivas – três delas, expressas através de símbolos não lógicos –, e 5 axiomas, a saber:

Noções Primitivas:

1. O conceito de número (quantidades), mas não de numerais (símbolos representativos dos números);
2. Os símbolos:
    a. $0 \equiv$ ‘zero’,
    b. $N[\alpha] \equiv$ ‘α é um número’
    c. $s(\alpha) \equiv$ ‘o sucessor imediato de α’
    d. $\rightarrow$ $\equiv$ ‘leva a’ ou ‘implica em’ ou ‘acarreta’
3. O símbolo ‘$\equiv$’ é metalingüístico (não faz parte da linguagem) e significa aqui: ‘equivale a’.
4. São também símbolos não pertencentes à linguagem os parêntesis, utilizados a seguir, como separadores.

Axiomas:

1. $N[0]$	O zero é um número
2. $\forall x(N[x] \Rightarrow N[s(x)])$	Qualquer que seja o número ele sempre tem um sucessor.
3. $\neg\exists\ s(x) = 0$	Não existe sucessor para o número zero.
4. $\forall x \forall y(\ s(x) = s(y) \Rightarrow x = y\ )$	Se o sucessor de x é igual ao sucessor de y, então x e y são iguais.
5. $P(0) \wedge \forall x(\ N[x], P(x) \rightarrow P(s(x))\ ) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x(\ N[x] \rightarrow P(x)\ )$	***Vide Observações abaixo***

Observações:

- O axioma 5 acima foi formulado segundo a Lógica Predicativa ou Lógica de Primeira Ordem, onde o a função predicativa (predicado = qualidade) P(x) significa ‘x tem a propriedade P’.

- Usando o axiomas 5, considerando conhecidas a definição de adição e a de multiplicação de números naturais iremos mostrar como exemplo que a seqüência formada pelos números: S_1: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n, ... poderá ser transformada em cada uma das seguintes seqüências numéricas: S_2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... ou então S_3: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

Seja adotar P( ) = dobro de ( ) = 2×( )

$$\mathbf{2\times(0) \wedge \forall x(\ N[x],\ (2\times(x)) \rightarrow (2\times(\ s(x)\ )\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x(\ N[x] \rightarrow (2\times(x))\ )}$$

Seja adotar P( ) = dobro de ( ) + 1 = (2×( )+1)

$$\mathbf{(2\times(0)+1) \wedge \forall x(\ N[x],\ (2\times(x)+1) \rightarrow (2\times(\ s(x)\ )+1)\ ) \Leftrightarrow \forall x(\ N[x] \rightarrow (2\times(x)+1\ ))}$$

4.3.1.- As Formulações Originais de Peano

A seguir serão mostradas as idéias de Peano *de acordo com a sua primeira abordagem*, em que o conjunto dos números naturais têm para primeiro elemento a "unidade", conceito que será modificado, mais tarde, em 1898 fazendo com que o zero passasse a ser considerado como o menor dos elementos do conjunto dos números naturais.

O símbolo N significa "número".
O símbolo 1 significa "unidade".
O símbolo a + 1 significa o sucessor de a, ou: 'a mais 1'.
O símbolo = significa "é igual a"

e em seguida enuncia os seus axiomas:

1. 1 ∈ N.
2. Se a ∈ N, a = a.
3. Se a, b ∈ N, a = b se, e somente se, b = a.
4. Se a, b, c ∈ N, a = b, b = c implica a = c.
5. Se a = b e b ∈ N, a ∈ N.

6. Se $a \in N$, então $a + 1 \in N$.
7. Se $a, b \in N$, $a = b$ se, e somente se, $a + 1 = b + 1$.
8. Se $a \in N$, $a + 1 \neq 1$.
9. Se K é uma classe, $1 \in K$, e se para $x \in N$ e $x \in K$ implicar que $x + 1 \in K$, então $N \subseteq K$.

Os axiomas são seguidos das seguintes definições: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, ..., e alguns teoremas, como por exemplo: $2 \in N$, $3 \in N$ etc. Ainda, como definição, ocorre a seguinte:

Se $a, b \in N$, $a + (b + 1) = (a + b) + 1$.

Cujo significado é: "se a e b são números então: $a + (b + 1)$ significa que $(a + b) + 1$ é o sucessor de $a + b$". Veja que isto permite escrever para qualquer $a \in N$, que:

$a + 2 = (a + 1) + 1$; $a + 3 = (a + 2) + 1 = ((a + 1) + 1) + 1$ e assim por diante.

Entre os teoremas enunciados e provados por Peano com a utilização dos axiomas anteriores, estão os seguintes:

1. Se $a, b \in N$, $a + b \in N$.
2. Se $a, b, c \in N$, $a = b$ se, e somente se, $a + c = b + c$.
3. Se $a, b, c \in N$, $a + (b + c) = (a + b) + c$.
4. Se $a \in N$, $1 + a = a + 1$.
5. Se $a, b \in N$, $a + b = b + a$.

Peano define a multiplicação da seguinte forma:

1. $a \in N$, $a \times 1 = a$
2. $a, b \in N$, $a \times (b + 1) = (a \times b) + 1$

4.3.2.- Incluindo o Zero

As idéias apresentadas no livro *“Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita”,* conhecido como: “*Princípios de Aritmética”,* modernamente são apresentados de formas diversas por diferentes autores. Adotaremos aqui uma formulação que nos parece bastante apropriada ao nível deste texto e do trabalho a ser aqui desenvolvido e que envolvem os seguintes conceitos e axiomas:

(1) O número zero – cujo símbolo será adotado como 0;

(2) A unidade – cujo símbolo será adotado como sendo 1;

(3) O conceito de variável numérica ou número – usando-se para representá-los as letras: m, n e p;

(4) O conceito de igualdade, cujo símbolo será “=”;

(5) O conceito de adição;

(6) O conceito de “sucessivo de” ou “sucessor de” – simbolicamente expresso como:

$$Suc(n)= n + 1;$$

(7) O conceito de conjunto e o de pertinência de elemento a conjunto;

(8) Cinco axiomas (afirmações básicas, tomadas como verdadeiras):

Aqui estão os Axiomas de Peano de acordo com a nossa formulação:

1º) O zero é um número natural
2º) Todo número natural n tem um único sucessor: Suc(n) = n + 1
3º) Se Suc(m) = Suc(p) então m = p
4º) Para todo número natural n, Suc(n) $\neq$ 0
5º) Se M é um subconjunto de N (conjunto dos números naturais), tal que: ***se*** **0 $\in$ M e Suc(p)$\in$ M sempre que p$\in$ M,** ***então*** **M = {0,1,2,3,4,...} = $\mathbb{N}$.**

Desta forma, fica estabelecido de maneira única, sem que possa haver ambigüidades ou contradições, o que seja o conjunto dos números naturais escrito em função dos elementos 0 e 1 e do conceito de Suc(x):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, ..., n, Suc(n), Suc(n) + 1, ...\}$$

que, na medida em que venhamos a reconhecer a correspondência entre os numerais hindu-arábicos e estas adições (ainda não definidas, mas que serão a seguir), como por exemplo: 1 + 1 = 2 , 1 + 1 + 1 = 3; 1 + 1+ 1 + 1 = 4 e assim por diante, o conjunto dos números naturais poderá ser reescrito como:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ 10, 11, ...\}.$$

4.5.- Propondo uma Moderna Axiomatização da Aritmética

A partir dos Axiomas de Peano normalmente, se pode propor "uma" Aritmética, onde alguns outros novos axiomas associados aos axiomas de Peano irão estabelecer as operações aritméticas e as suas propriedades. Veja a seguir uma destas possíveis "propostas". Tente explicar cada um daqueles 10 axiomas e verificar se este conjunto de axiomas é suficiente para "suportar" tudo o que necessitamos nesta proposta axiomática para uma "Aritmética envolvendo Números Naturais".

Os axiomas deste sistema axiomático, uma "Aritmética envolvendo Números Naturais", utilizam os seguintes **símbolos**:

(i) '0' para representar o 'número zero' e 'x' e 'y' para representar um número natural qualquer (uma variável);

(ii) 's(x)' para representar o 'sucessor do número natural x';

(iii) '+' para representar a 'adição';

(iv) '×' para representar a 'multiplicação';

(v) '<' para representar 'menor do que' e

(vi) '=' para representar a igualdade;

(vii) 'φ(x)' representa uma 'propriedade φ' da 'variável x'.

Podemos analisar o significado de (vii) acima, como no exemplo: 'φ(x) = 'x é um número par' ou seja: 'φ(x) = 2 × x'. A propriedade φ 'transforma' um número x em seu dobro, assim φ(s(x)) = 2×s(x) é um número par' ou em outras palavras: o dobro do sucesso de x é um número par. O que pode ser verificado com: φ(s(7)) = o dobro do sucessor de 7 = 2 × 8 = 16 e também φ(s(8)) = o dobro do sucesso de 8 = 2 × 9 = 18.

Neste sistema nós podemos estabelecer a biunivocidade entre os numerais hindu-arábidos e os sucessores de um número:

1 = s(0), 2 = s(s(0)), 3 = s(s(s0))) e assim por diante.

E podemos estabelecer ainda como Axiomas:

1.	$(\forall x)\ (s(x) = x + 1)$	Qualquer que seja $x \in N$, existe um elemento $x+1 \in N$, que é o sucessor de x.
2.	$(\forall x)\ \neg(s(x) = 0)$	Qualquer que seja $x \in N$, ele não terá o 0 como sucessor, ou seja, o zero não é sucessor de nenhum número natural. E mais, 'O zero é o primeiro número natural'.
3.	$(\forall x, y)\ (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y)$	
4.	$(\forall x)\ (x + 0 = x)$	
5.	$(\forall x, y)\ (x + s(y) = s(x + y)\ )$	
6.	$(\forall x)\ (x \times 0 = 0)$	
7.	$(\forall x, y)\ (x \times s(y) = x \times y + x)$	
8.	$(\forall x)\ \neg(x < 0)$	
9.	$(\forall x, y)\ (x < s(y) \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)\ )$	
10.	$\varphi(0) \wedge (\ \forall x\ (\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x))\ ) \Rightarrow \forall x\ (\ \varphi(x)\ )$	

4.6.- Outros Conjuntos de Axiomas

Há vários conjuntos de axiomas dedicados a modelar a Aritmética e o leitor interessado pode pesquisar no site do Google (www.google.com) procurando pelos nomes dos seguintes pensadores lógico-matemáticos:

- Charles Sanders **Peirce** (1839/1914)
- Julius Wilhelm Richard **Dedekind** (1831/1916)
- Giuseppe **Peano** (1858/1932) – Axiomas de Peano
- Mojżesz **Presburger** (1904–1943)
- Raphael Mitchel **Robinson** (1911/ 1995) – 'Sistema Aritmético Q' ou 'Aritmética Q de Robinson'.
- Andrzej **Mostowski** (1913 –1975)

No apêndice da Parte C deste livro ('60 Jogos Para o Pensamento Aritmético') o leitor irá encontrar um apêndice que reúne as idéias de todos estes pensadores desenvolvidas em detalhes.

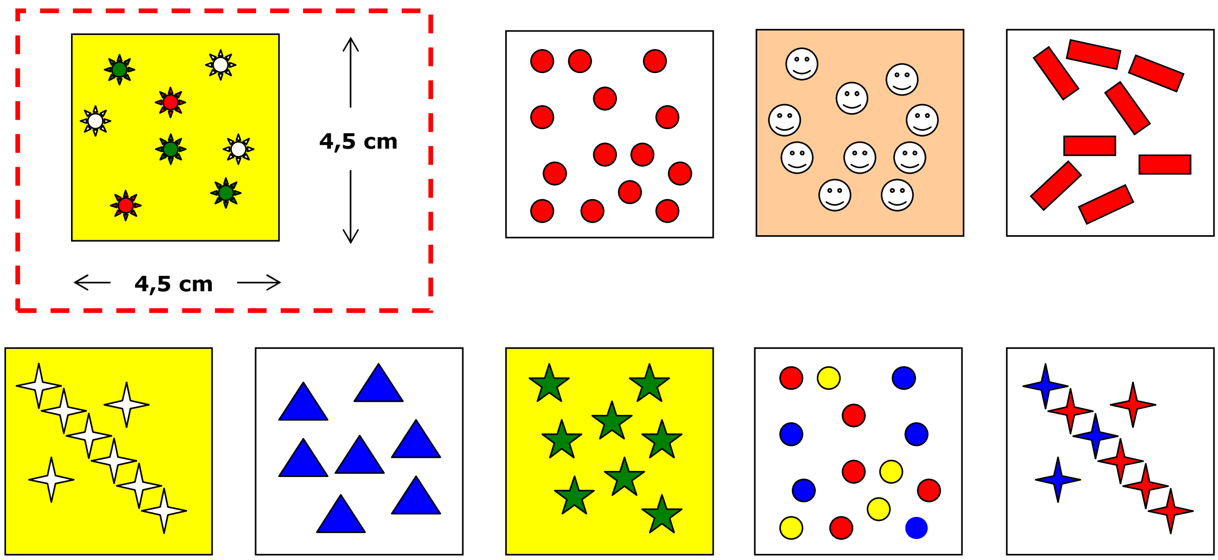
JARIT#05 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 05

Contagem Com Cartões Logicamente Neutros

No primeiro livro – '40 Jogos Para o Pensamento Lógico' – desta coleção denominada Jogos Para o Pensamento Lógico-Matemático nós pudemos estudar os Cartões Logicamente Neutros e Cartões Logicamente Impregnados no JLOGC#08 (item 8.1.2.2.). Aqui, neste volume dedicado à aritmética nós estaremos interessados em Cartões Numéricos Logicamente Neutros Destinados à Contagem. Estes cartões nos permitirão realizar de forma concreta as operações aritméticas fundamentais: adição, subtração, multiplicação e divisão, além de permitir concretizar a sequência de operações envolvidas na resolução de problemas aritméticos.

5.1.- Cartões Numéricos Logicamente Neutros

Um cartão *Logicamente Neutro Destinado à Contagem* ou *Cartão Numérico Logicamente Neutro* é um cartão de tamanho e forma, geralmente padronizado (sugere-se aqui: quadrados de 4,5 cm por 4,5 cm ou retângulos de 4,5 cm por 6 cm, por exemplo), onde aparecem desenhados uma quantidade de pontos, bolinhas ou quadradinhos, ou ainda desenhos como patinhos, coelhinhos etc., distribuídos de forma desorganizada (distribuição aleatória) sobre a superfície do cartão. Estes cartões não simbolizam o número de objetos nele contidos por exigirem sempre a contagem destes objetos (vide item 8.1.2.2. do JLOGC#08 do Volume 1).

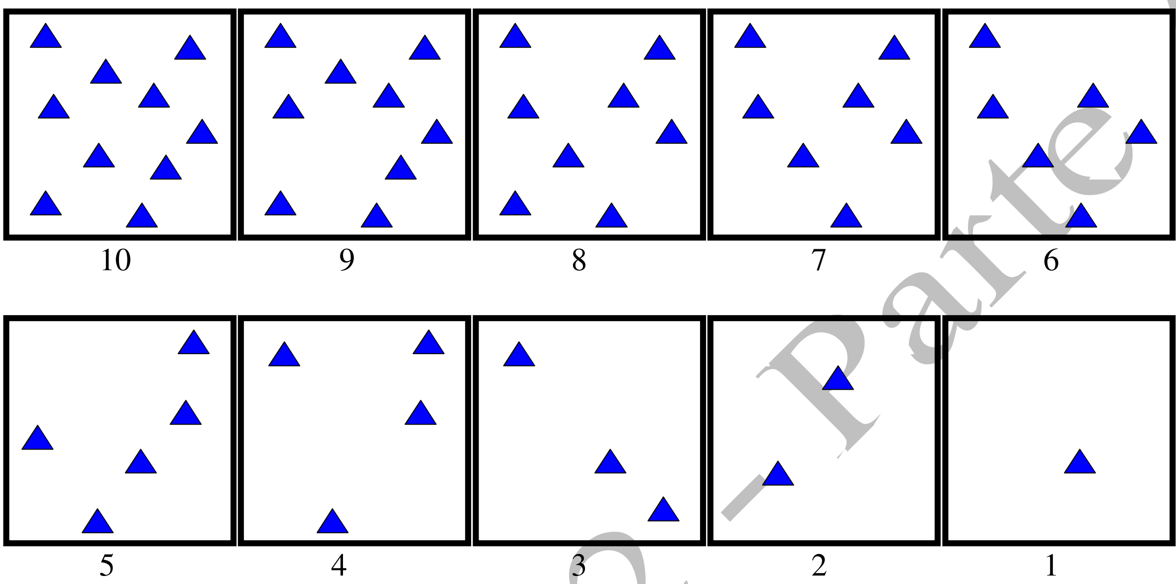


Estes cartões podem ser confeccionados pelo professor para atender as suas necessidades pedagógicas, de acordo com os seguintes exemplos: utilização de carimbos de borracha; figuras idênticas recortadas em papel espelhado colorido e coladas sobre os cartões, que devem ser em seguida

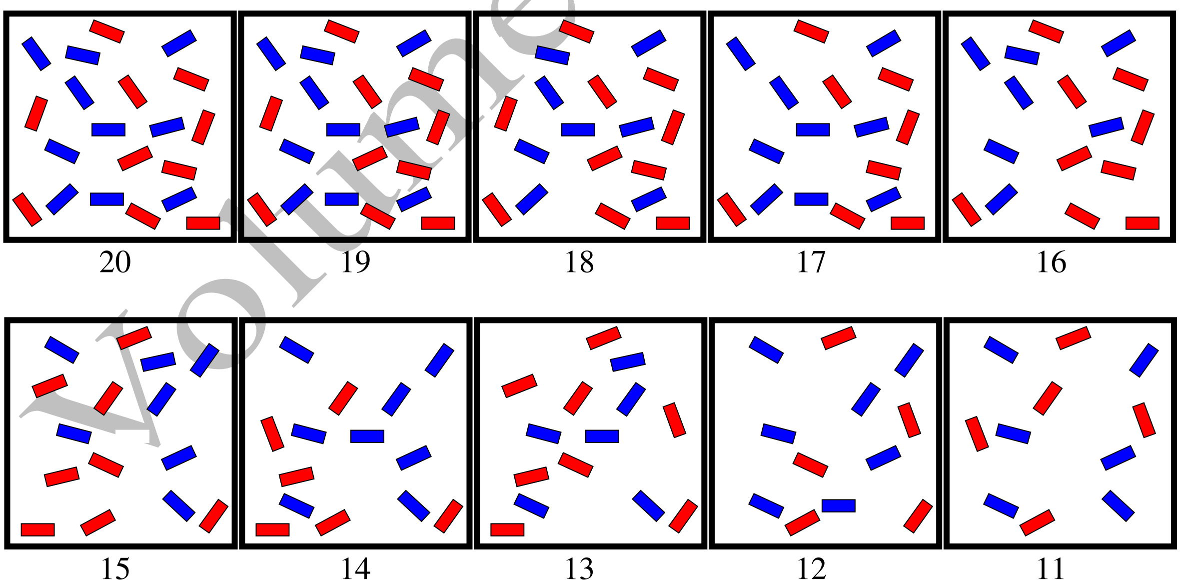
plastificados; placas emborrachadas perfuradas (usar um vazador redondo ou vazadores que produzam furações com formas geométricas); placas de madeira compensada desenhadas com o auxílio de um pirógrafo (aparelho elétrico usado para gravar desenhos através de superaquecimento de hastes metálicas, muito usado para produzir artesanato).

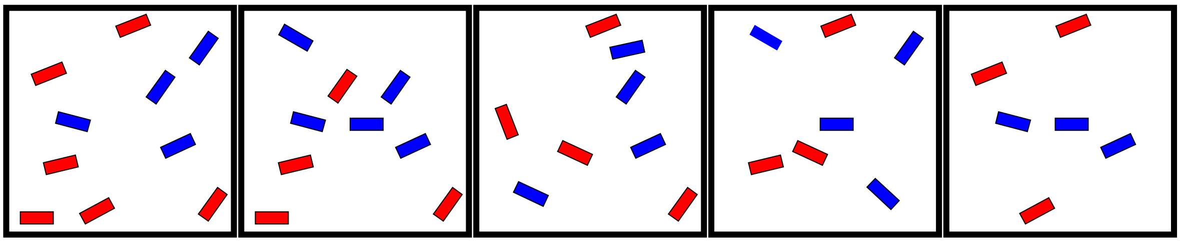
5.1.2.- Exemplos de Cartões Logicamente Neutros

Família com 10 elementos da mesma cor (cartão monocolor)

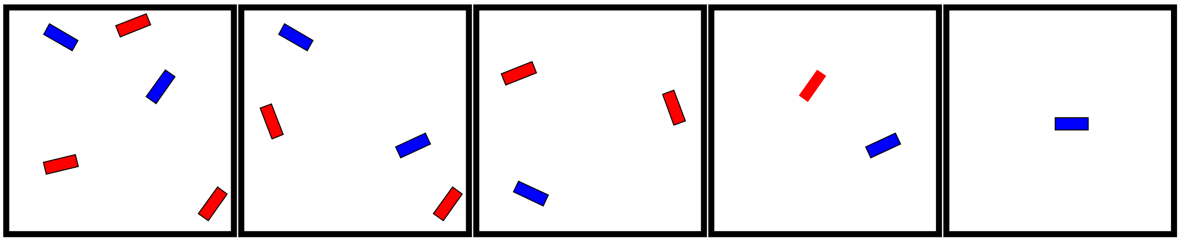


Família com 20 cartões bicolores: 10 de uma cor e 10 de outra corda mesma cor ()



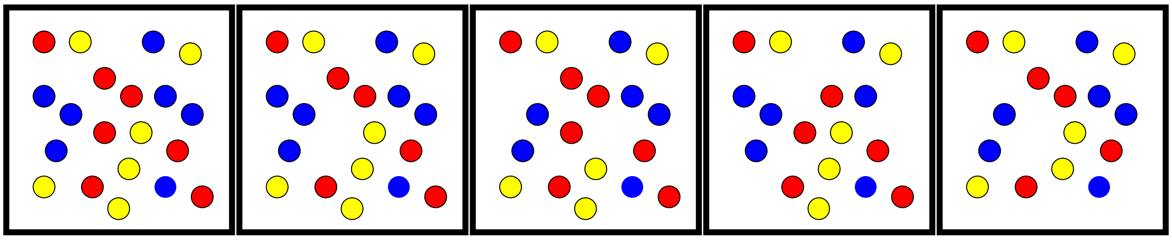


10 9 8 7 6

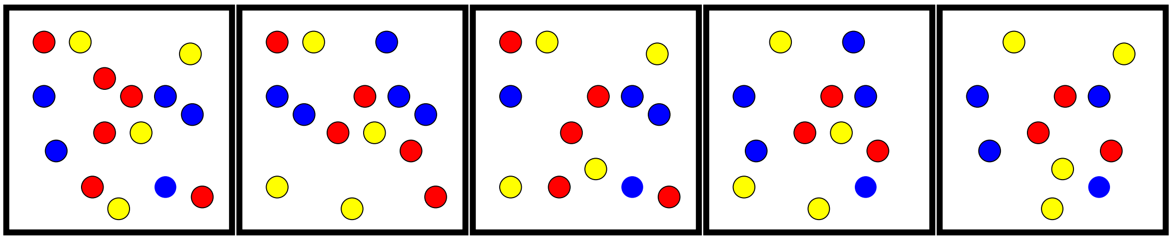


5 4 3 2 1

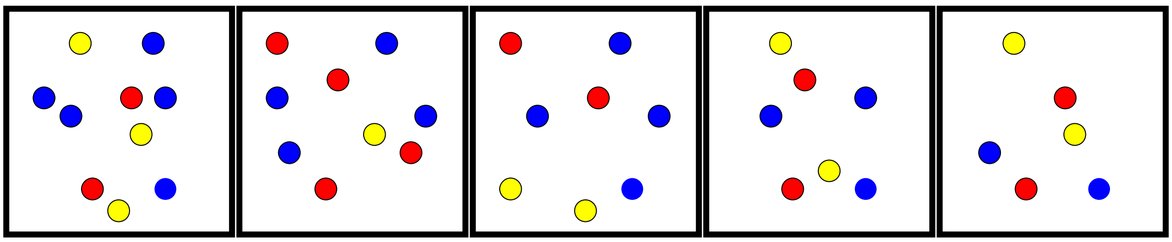
Família com 20 e cartões tricolores: 6 elementos amarelos; 7 elementos azuis e 7 elementos vermelhos



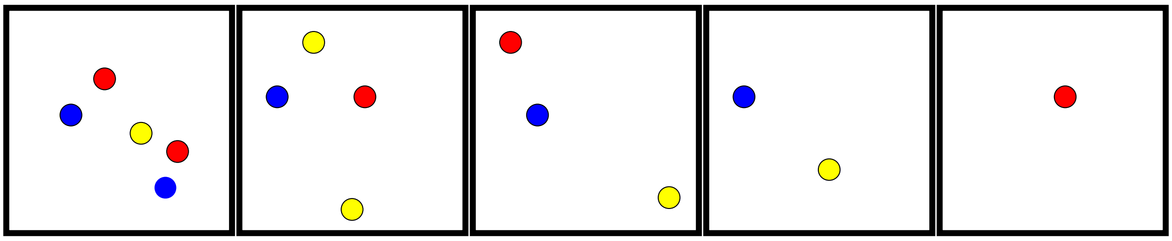
20 19 18 17 16



15 14 13 12 11



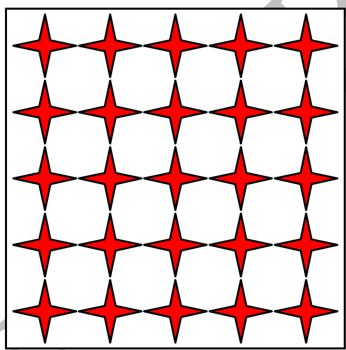
10 9 8 7 6



5 4 3 2 1

5.2.- Uma Família de Cartões Logicamente Neutros Interligados

Escolhemos como módulo básico um cartão quadrado com 4,5 cm de lado, contendo 25 'estrelas' desenhadas de forma bem organizada, na forma de uma matriz[10]: com cinco estrelas em cada uma das linhas por cinco estrelas em cada uma das colunas. A cor das estrelas será única, elas serão todas de uma mesma cor.



Utilizando este módulo básico iremos gerar *oito famílias* de cartões (com 26 cartões cada uma) que serão distinguíveis através de:

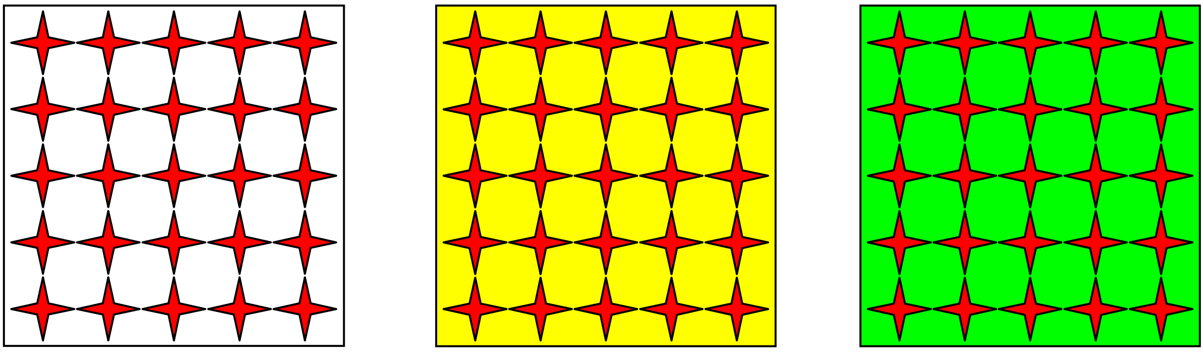
(a) Cores dos fundos: branco, amarelo ou verde;

(b) Cor das estrelas: vermelhas ou azuis.

(c) Quantidade de estrelas coloridas em vermelho: de 0 até 25;

(d) Quantidade de estrelas descoloridas (cujos contornos são mantidos): de 0 até 25.

[10] Matriz: arranjo de m por n elementos matemáticos (elementos de um conjunto) dispostos num quadro retangular ou quadrado que comporta m linhas e n colunas.

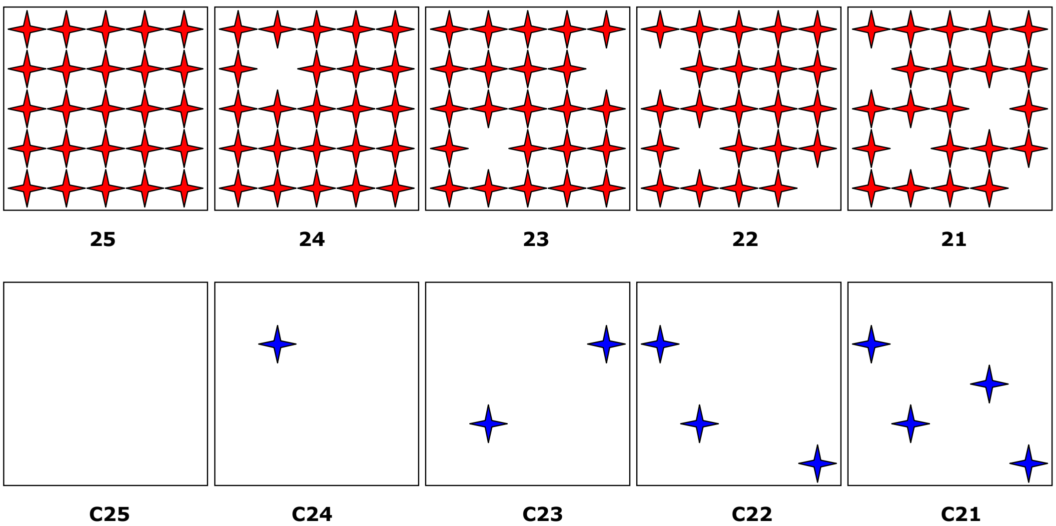


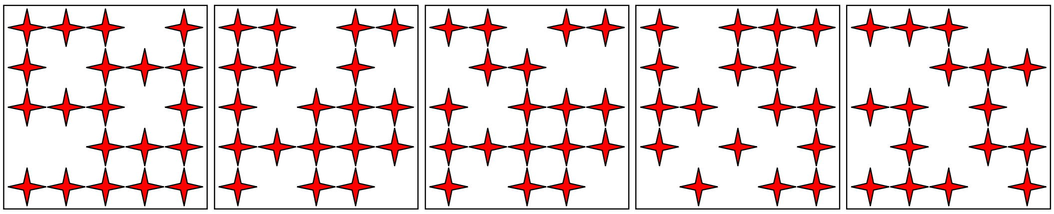
Os cartões coloridos de cada família terão seus correspondentes exatamente equivalentes em termos de posicionamento das estrelas nas outras duas famílias, assim, haverá sempre seis cartões exatamente iguais quanto à disposição das estrelas coloridas, a menos da cor do fundo.

5.2.1.- A Família de Cartões Obtida pela Supressão de Estrelas

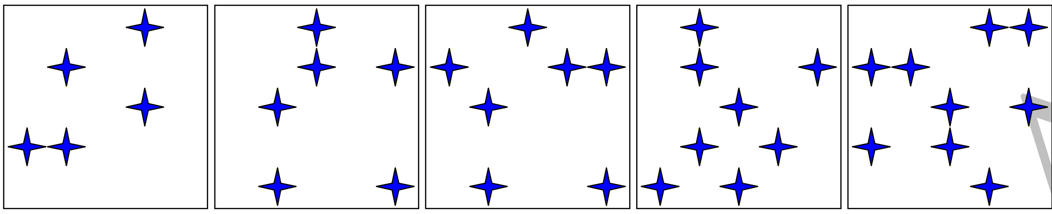
A seguir iremos mostrar uma família de *Cartões Estrelas Vermelhas* com fundo branco destinada à contagem e à realização das operações aritméticas. A quantidade de estrelas nos cartões desta família varia de 25 a zero, o que é conseguido pela *supressão aleatória* de 0, 1, 2, 3, 4, ... até 25 das estrelas, como mostrado a seguir, com o que poderemos gerar 26 cartões.

Os cartões complementares aos *Cartões Estrelas Vermelhas* são os denominados *Cartões Estrelas Azuis.*

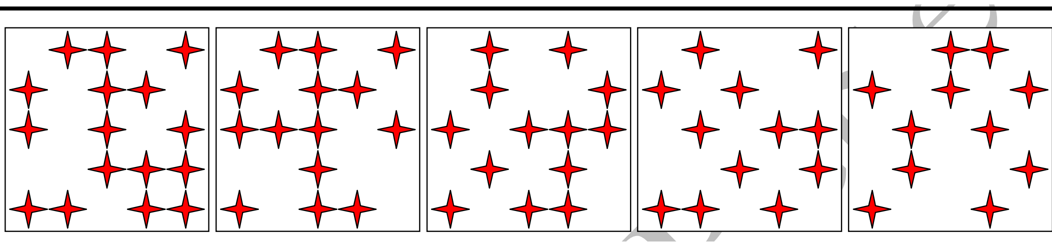




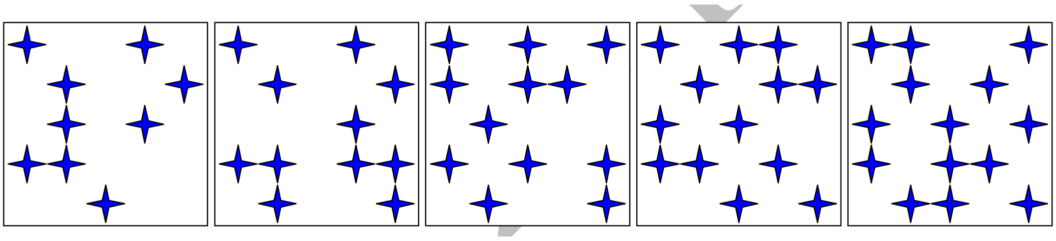
20 19 18 17 16



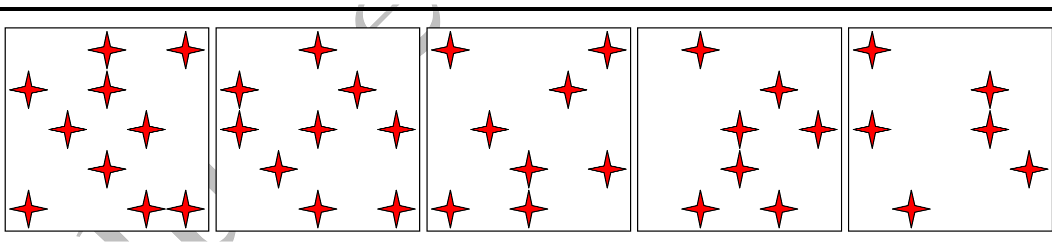
C20 C19 C18 C17 C16



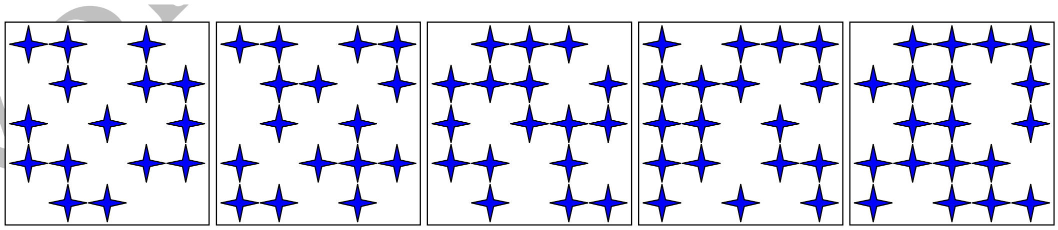
15 14 13 12 11



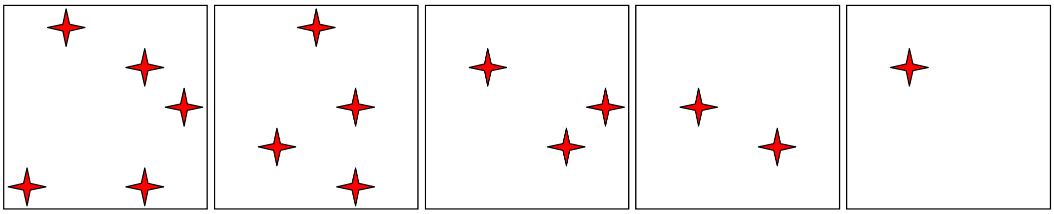
C15 C14 C13 C12 C11



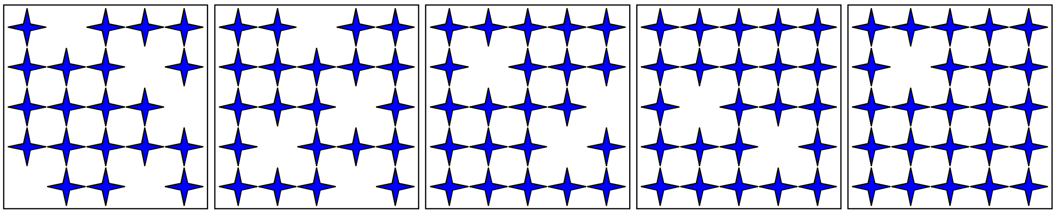
10 9 8 7 6



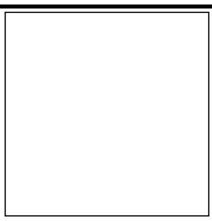
C10 C9 C8 C7 C6



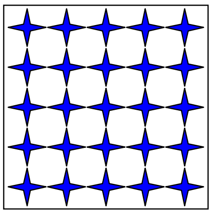
5 4 3 2 1



C5 C4 C3 C2 C1



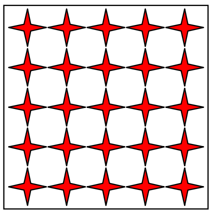
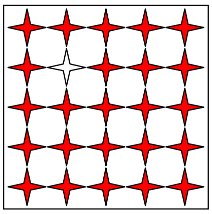
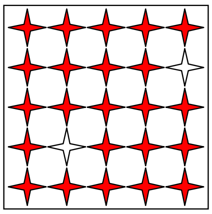
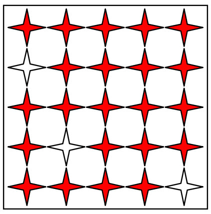
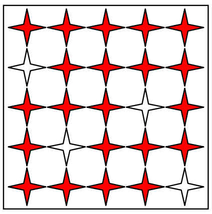
zero

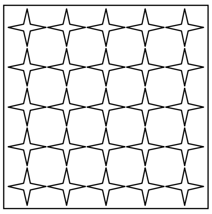
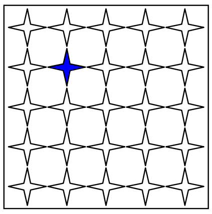
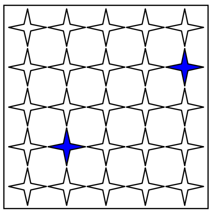
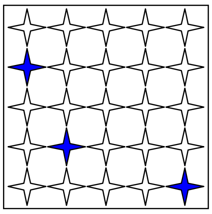
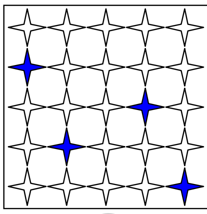


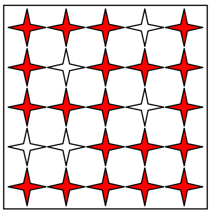
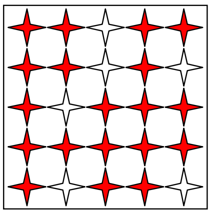
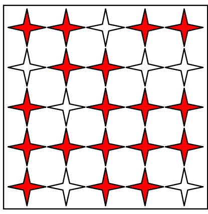
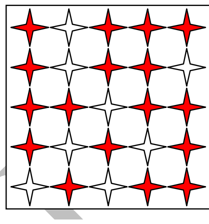
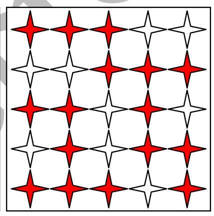
Czero

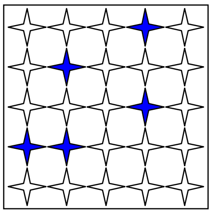
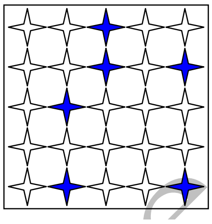
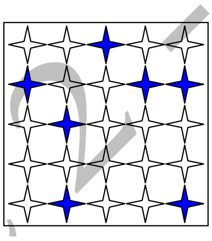
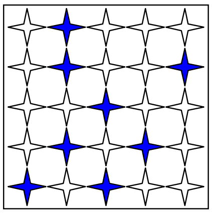
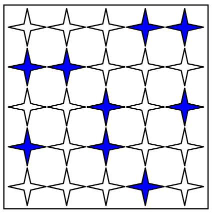
5.2.2.- A Família de Cartões com Estrelas Descoloridas

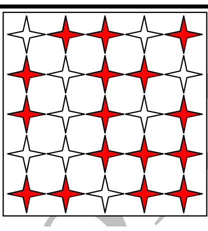
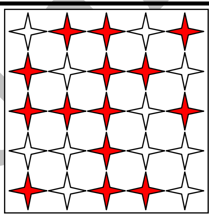
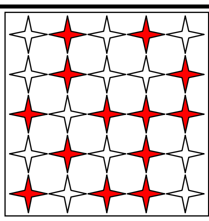
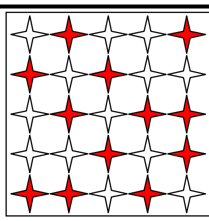
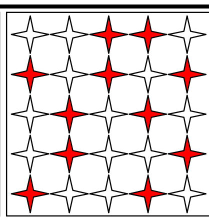
Esta família de cartões é caracterizada pela quantidade de estrelas que foram descoloridas – deixaram de ser vermelhas ou azuis, adquirindo a cor do fundo dos cartões –, ou seja, as estrelas perderam a sua cor, tendo sido mantidos os seus contornos. Isto permite a contagem das estrelas 'descoloridas' ou então das estrelas coloridas, cuja soma destas duas quantidades estrelas: vermelhas + estrelas descoloridas = 25. Assim, a quantidade de estrelas descoloridas tem como *'complemento de 25'* (o que falta para completar o total de estrelas que é 25) o valor das estrelas coloridas, e vice versa.

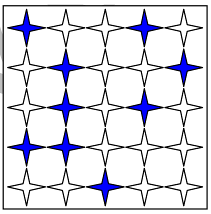
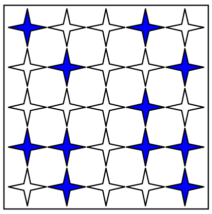
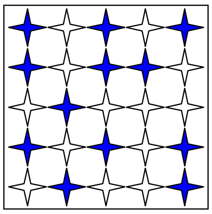
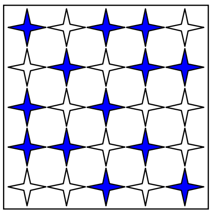
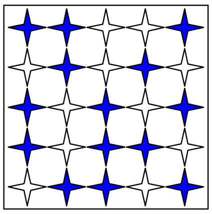

25

24

23

22

21

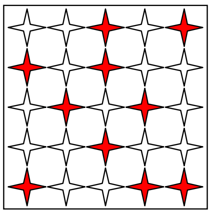

C25

C24

C23

C22

C21

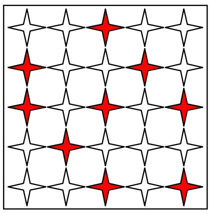

20

19

18

17

16

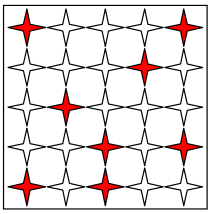

C20

C19

C18

C17

C16

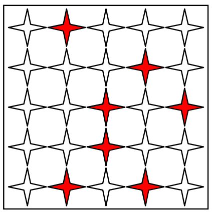

15

14

13

12

11

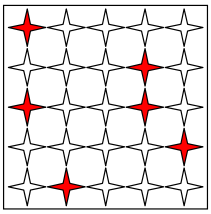

C15

C14

C13

C12

C11

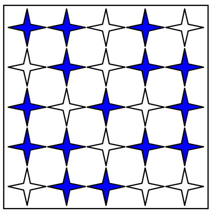

10

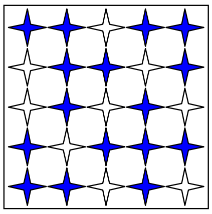

9

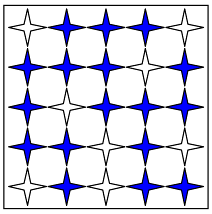

8

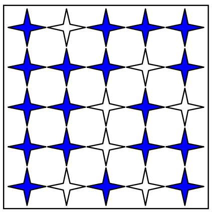

7

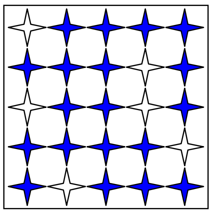

6

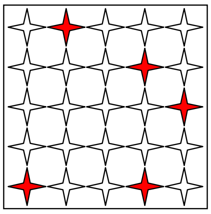

C10

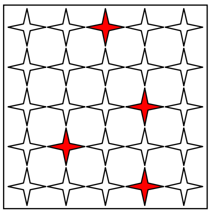

C9

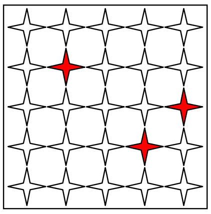

C8

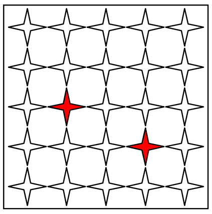

C7

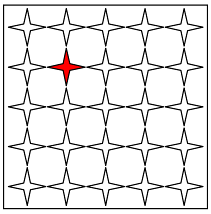

C6

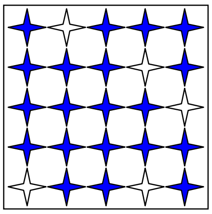

5

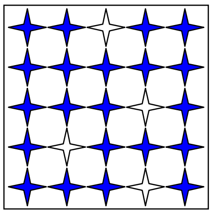

4

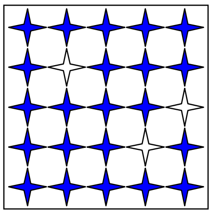

3

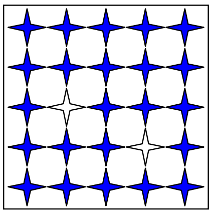

2

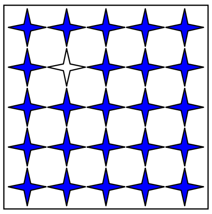

1

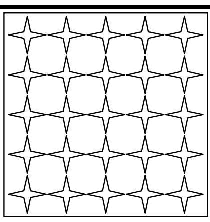

C5

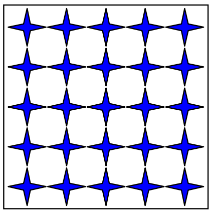

C4


C3


C2


C1


zero


Czero

5.3.- Cartões com Numerais Hindu-arábicos

Os cartões a seguir apresentam-se com os numerais denominados hindu-arábicos. Eles compõem com os cartões destinados à contagem uma parceria bastante importante, pois um das etapas da aprendizagem da aritmética que sucede à contagem é a tarefa de se fazer corresponder a cada número um numeral. Os numerais, no caso da nossa cultura, poderão ser numerais hindu-arábicos (algarismos), numerais romanos, ou então, um numeral escrito por extenso em uma língua, sejam elas, por exemplo: português, inglês, espanhol ou francês.

25	24	23	22	21
20	19	18	17	16
15	14	13	12	11
10	<u>9</u>	8	7	<u>6</u>
5	4	3	2	1
0				

5.3.1.- Numerais Romanos

XXV	**XXIV**	**XXIII**	**XXII**	**XXI**
XX	**XIX**	**XVIII**	**XVII**	**XVI**
XV	**XIV**	**XIII**	**XII**	**XI**
X	**IX**	**VIII**	**VII**	**VI**
V	**IV**	**III**	**II**	**I**

Observe que: não existe nos numerais romanos a representação para o zero.

5.4.- Cartões com Numerais Escritos por Extenso

Os numerais podem ser escritos por extenso em português, inglês, espanhol ou francês, o que permitirá às crianças tomarem contacto com outras línguas.

5.4.1.- Português:

vinte e cinco	**vinte e quatro**	**vinte e três**	**vinte e dois**	**vinte e um**

vinte	dezenove	dezoito	dezessete	dezesseis
quinze	quatorze ou catorze	treze	doze	onze
dez	nove	oito	sete	seis
cinco	quatro	três	dois	um
zero				

5.4.2.- Inglês:

twenty five	twenty four	twenty three	twenty two	twenty one
twenty	nineteen	eighteen	seventeen	sixteen

fifteen	fourteen	thirteen	twelve	eleven
ten	nine	eight	seven	six
five	four	three	two	one
zero				

5.4.3.- Espanhol:

veinticinco	veintiquatro	veintitrés	veintedos	veintiuno
veinte	diecenuove	dieciocho	diecisiete	dieciseis
quince	catorce	trece	doce	once

diez	nueve	ocho	siete	seis
cinco	quatro	tres	dos	uno
cero				

5.4.4.- Francês:

vingt cinq	vingt quatre	vingt trois	vingt deux	vingt un
vingt	dix-neufe	diz-huit	dix-sept	seize
quinze	quatorze	treize	douze	onze
dix	neufe	huit	sept	six

cinq	**quatre**	**trois**	**deux**	**un**
zéro				

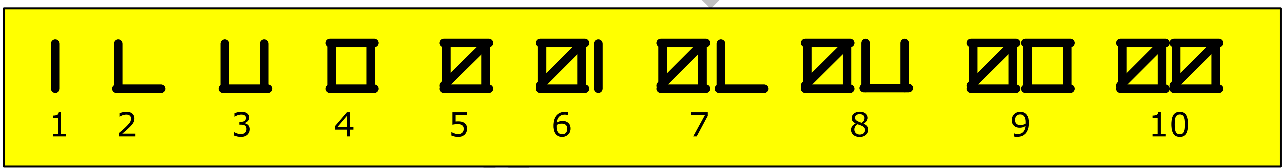
JARIT#06 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 06

Contagem Com Cartões Logicamente Estruturados

No JLOGC#08 introduzimos o conceito de Cartões Logicamente Neutros e Cartões Logicamente Impregnados (vide item 8.1.2.2. naquele JLOGC) idéias baseadas respectivamente nas noções de números (quantidades) e numerais (símbolos). Neste JARIT iremos tomar contacto com os Cartões Logicamente Estruturados Destinados à Contagem que, no fundo, são cartões logicamente impregnados cuja idéia de número é induzida pela estrutura proposta: a contagem de 1 a 10 ou até 20 utilizando-se pequenos quadrados cortados por uma de suas diagonais, distribuídos ordenadamente

6.1.- Uma Forma Prática de Anotar Quantidades e de Contá-las

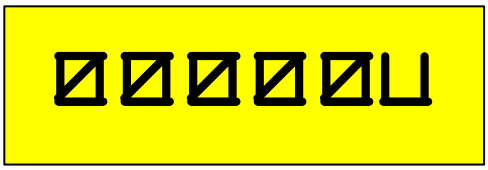
Uma maneira bastante comum de representação de quantidades numéricas é mostrada na tabela a seguir. Esta forma de notação para a representação de números (quantidades) é muita utilizada durante jogos de basquetebol – 'jogo de basquete' –, em que a quantidade de pontos obtida com cada cesta vai sendo anotada utilizando-se pequenos segmentos de reta, que agrupados sob a forma de um quadrado cortado por sua diagonal, nos permite representar o número 5.

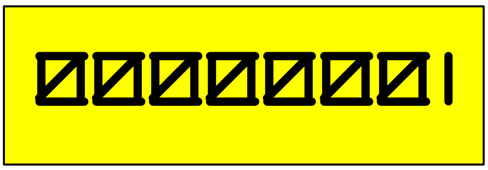


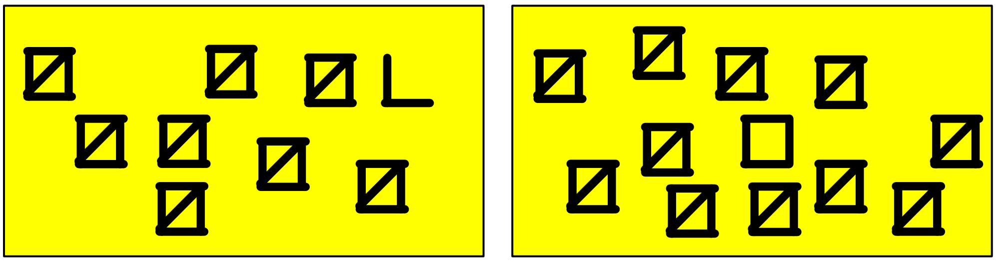
No basquetebol existem 3 tipos de pontuação para cada cesta que um jogador faz - lance finalizado – o que lhe permitirá ter o seu lance convertido em 1, 2 ou até 3 pontos. A contagem se faz da seguinte forma: lances de dentro do garrafão = 2 pontos; de fora do garrafão = 3 pontos; lance livre (nos casos de punição para faltas cometidas pelos adversários) = 1 ponto.

Com estes símbolos – cinco segmentos de reta formando um quadrado e sua diagonal –, fica fácil computar, por exemplo, a quantidade total de pontos em uma partida de basquete, através da contagem de todos os múltiplos de 5: 5, 10, 15, 20, etc.

Analise as figuras mostradas a seguir, e verifique se suas contagens estão corretas com relação aos números representados naquelas figuras.



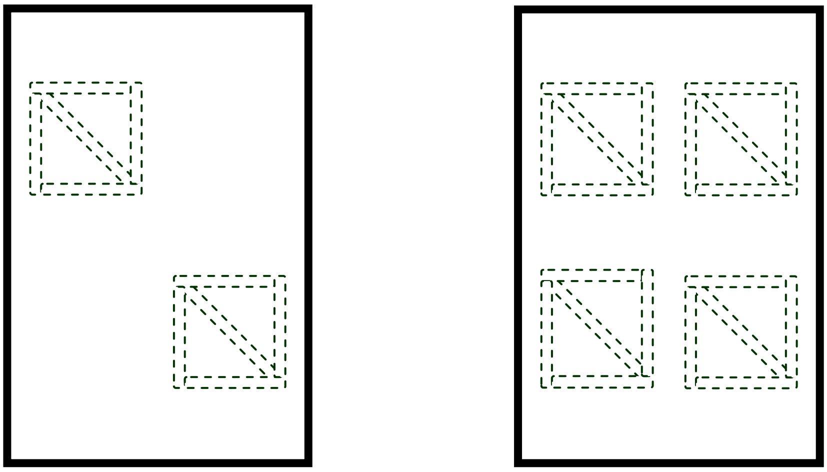




Vamos conferir as nossas contagens: vinte e nove; trinta e seis; quarenta e dois e cinqüenta e nove.

6.2.- Criando Cartões de Contagem

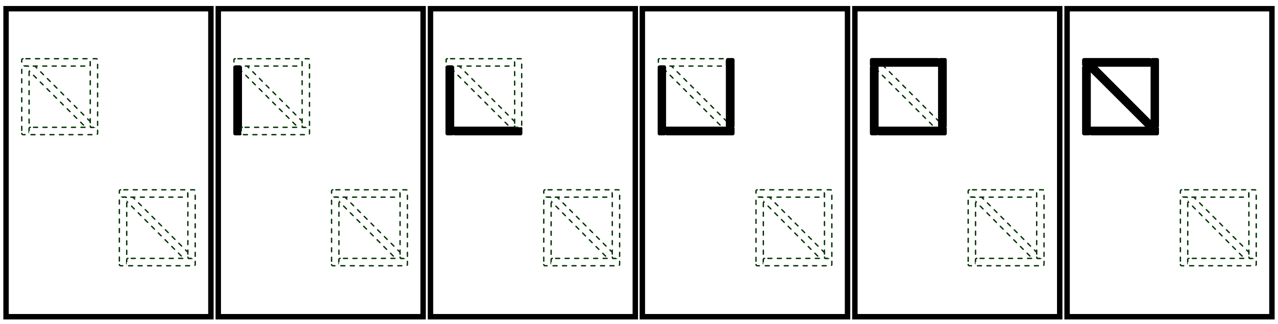
A seguir vamos mostrar os módulos básicos das duas famílias de cartões que iremos criar, cujas medidas são 6cm × 4cm, e que utilizam os símbolos anteriormente mostrados – o quadrado cortado por uma de suas diagonais.

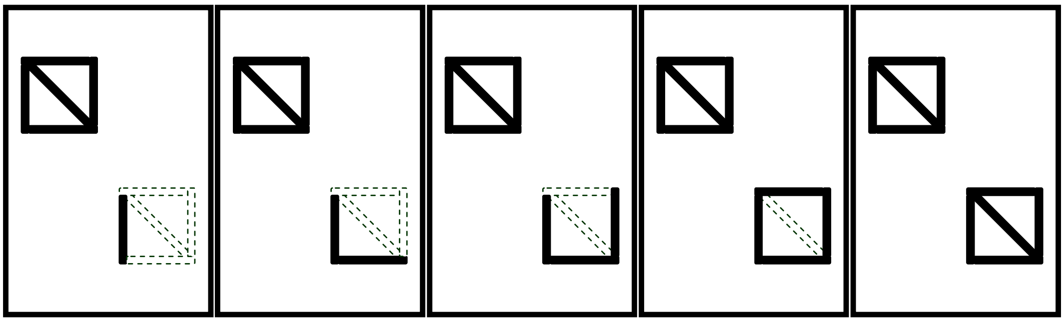


Segundo cada um destes módulos, a primeira família de cartões mostrará quantidades (números) de zero a dez, e a segunda, mostrará as quantidades de zero a vinte.

6.2.1.- Cartões de Contagem de Zero até 10

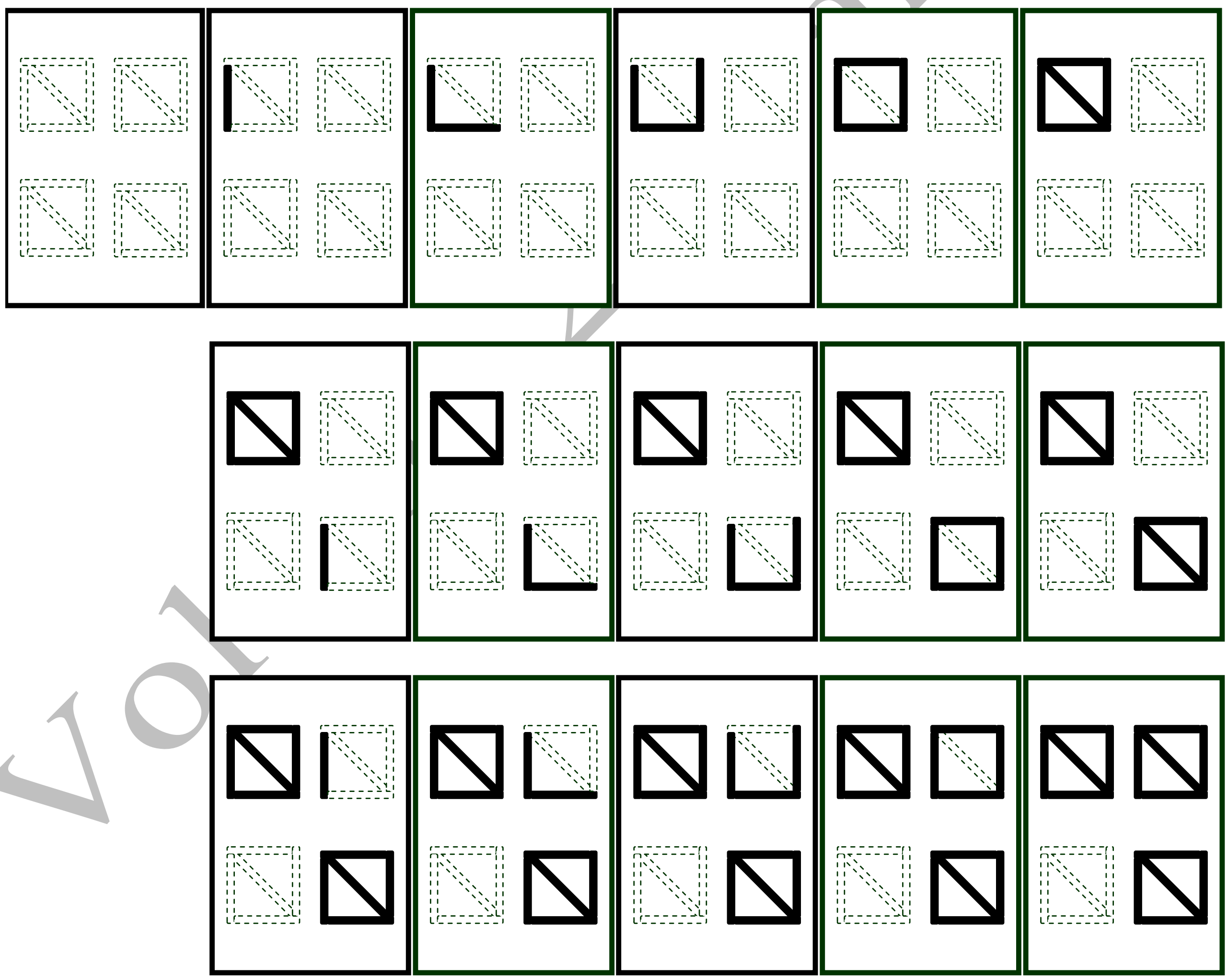
Esta é uma família de cartões destinada à contagem de 0 até 10. Com ela poderemos simular, por exemplo, operações aritméticas.

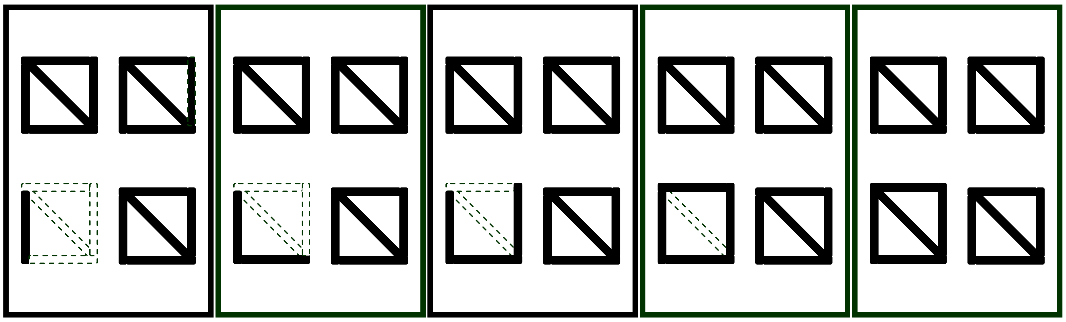




6.2.2.- Cartões de Contagem de Zero até 20

Esta é uma família de cartões destinada à contagem de 0 até 20. Com estes cartões poderemos simular, por exemplo, operações aritméticas mais complexas do que as que podemos simular com os cartões de Contagem de 0 até 10.





6.2.3.- Os Cartões de Contagem Coloridos

Podemos ampliar a quantidade de elementos dos Conjuntos de Cartões de Contagem de Zero até 10 e os de Zero até 20 adotando cores de fundo para os mesmos: amarelo, vermelho e azul. Assim teremos 11 cartões com fundo branco e 33 cartões coloridos (11 de cada uma das cores) num total de 44 Cartões de Contagem de Zero até 10, e da mesma forma, partindo dos 21 cartões de fundo branco, o conjunto total de Cartões de Contagem de Zero até 20, irá totalizar 84 cartões.

6.3.- Jogos Simples com os Cartões de Contagem

Para estes jogos deve-se imprimir, plastificar e recortar 4 famílias de Cartões de Contagem de 0 a 10 (que irão totalizar 40 cartões), e 2 famílias de Cartões de Contagem de 0 a 20 (que também totalizarão 40 cartões). Podem participar destes jogos 2, 3 ou até 4 jogadores.

Os três jogos apresentados a seguir *não são jogos complexos* pois se destinam a crianças (ou pessoas) que estejam na fase de inicial da aprendizagem sobre as propriedades das operações aritméticas envolvendo números inteiros.

6.3.1.- Regras do Jogo "O Maior Ganha"

Embaralhar muito bem dois conjuntos de Cartões de Contagem de Zero até 10 distribuindo os cartões virados para baixo entre dois jogadores. Os maços contendo dez cartões cada um devem ser mantidos virados para baixo durante todo o jogo.

1. O primeiro e o segundo jogadores expõem sobre a mesa (com a face voltada para cima) o cartão que esteja na parte superior dos seus maços.
2. O jogador que lançou o cartão de maior valor recolhe para si os dois cartões.
3. O jogo termina quando o último cartão do monte é jogado.
4. Os cartões recolhidos por cada um dos jogadores devem ser contados.

5. Ganha o jogador que conseguiu recolher a maior quantidade de cartões.

6.3.1.1.- Observações

a) Devem ser utilizados um conjunto de Cartões de Contagem de Zero até 10 para cada jogador. Assim, o jogo pode envolver até cinco jogadores.

b) Podem ser utilizados os conjuntos de *Cartões de Contagem de Zero até 20* e, desta maneira, envolver mais jogadores do que cinco. Neste caso a quantidade de jogadores deve ser um número par e a quantidade de cartões a serem distribuídas deve ser sempre: 10 para cada jogador, quantidade esta, que irá determinar quantos conjuntos de *Cartões de Contagem de Zero até 20* devem ser envolvidos no jogo.

6.3.2.- Regras do Jogo "Vinte e Um"

Embaralhar muito bem dois ou mais conjuntos de Cartões de Contagem de Zero até 10, distribuindo os cartões entre os jogadores. A escolha da quantidade de conjuntos de cartões dependerá da quantidade de jogadores. Os jogadores devem posicionar os cartões em suas mãos de forma que somente eles, mas não os demais jogadores, o possam vê-los.

1. Os jogadores descartam seus cartões com a finalidade de perfazer, com os valores dos demais cartões sobre a mesa, uma soma igual a 21.
2. O jogador que conseguir perfazer o '21' recolhe os cartões para si.
3. O jogo termina quando o último cartão é jogado perfazendo-se ou não o '21'.
4. Os cartões recolhidos por cada um dos jogadores devem ser contados.
5. Ganha o jogador que conseguiu recolher a maior quantidade de cartões.

6.3.3.- Regras do Jogo "Quarenta e Dois"

Este é um jogo com as mesmas regras do jogo anterior somente que agora o valor a ser totalizado de ser '42', pois passaremos a utilizar conjuntos de Cartões de Contagem de Zero até 20.

6.4.- Jogos Complexos com os Cartões de Contagem

Os jogos aqui apresentados, ao contrário dos jogos anteriores apresentados no item 6.3., possuem regras bastante complexas. Eles devem ser jogados por crianças que já saibam ler e que discutam antes do jogo as regras que devem ser adotadas.

6.4.1.- Os Jogos Complemento de 10 ou de 20

O Jogo do Complemento de 10 é jogado com os Cartões de Contagem de 0 a 10 e o Jogo do Complemento de 20 com os Cartões de Contagem de 0 a 20.

Para estes jogos deve-se imprimir, plastificar e recortar 4 famílias de Cartões de Contagem de 0 a 10 totalizando 40 cartões, e 2 famílias de Cartões de Contagem de 0 a 20 que também totalizarão 40 cartões. Podem participar destes jogos 2, 3 ou até 4 jogadores.

As regras do jogo são as seguintes:

(1) Um dos jogadores deve embaralhar bem o conjunto de 40 cartões (Cartões de 0 a 10 ou então os Cartões de 0 a 20) e distribuir 5 cartões para cada jogador;

(2) Deixar sobre a mesa o restante dos cartões num 'monte' com as faces voltadas para baixo;

(3) O primeiro jogador descarta um de seus cartões com a face voltada para cima;

(4) O jogador seguinte deve:

   a) Descartar um cartão que complete para 10 (ou para 20) o cartão (ou cartões) que está (que estão) sobre a mesa, retirando para si o par de cartões que se complementarem – eles serão contados como pontos para o jogador no final do jogo;

   b) Se este jogador formar um par, ele deve retirar o par de cartões para si e descartar qualquer um de seus cartões;

   c) Se jogador não tiver este cartão que complete o que está sobre na mesa deve comprar o cartão de cima do monte e descartar qualquer um de seus cartões completem ou não o valor do cartão sobre a mesa;

(5) Repetir o passo (3)

(6) O jogo termina quando um dos jogadores tiver descartado todos os seus cartões, sendo que: os pontos obtidos deverão ser contados da seguinte forma: cada par de cartões valem 2 pontos e cada cartão restante nas mãos do jogador valem '–1' (valem menos um, isto é, deve-se descontar um ponto do total de pontos ganhos com os pares de cartões recolhidos).

6.4.2.- Jogo Complemento de 20 Com três dados Hexagonais

Este é um jogo do tipo solitário, em que somente uma pessoa joga tentando eliminar todos os cartões do jogo.

As regras deste jogo são as seguintes:

(1) Embaralhar bem o conjunto de 40 Cartões de 0 a 20;

(2) Deixar sobre a mesa os 40 cartões num ‘monte’ com as faces voltadas para baixo;

(3) Retirar um cartão do monte e coloca-lo com a face virada para cima sobre a mesa;

(4) Lançar os três dados hexagonais e escolher: o valor de face de um dos dados, a soma de dois destes valores ou a soma dos três valores (máxima soma: 18);

(5) Somar o valor escolhido nos dados e o valor do cartão:

   a) Se o valor da soma for 20, retirar o cartão do jogo;

   b) Se o valor não for 20 deixar o cartão sobre a mesa e retirar do monte de cartões um novo cartão, depositando-o com a face para cima na mesa;

   c) Se este novo cartão completar para 20 o cartão (ou qualquer um dos cartões sobre a mesa quando houver mais de um cartão), retirar do jogo este par de cartões;

(6) O jogo termina quando não houver mais cartões no monte de cartões;

(7) Os cartões sobre a mesa devem ser contados como pontos negativos;

(8) O desafio final do jogo é o seguinte: esgotar os cartões do monte e não deixar nenhum cartão restante sobre a mesa, mas isto me parece bastante difícil...

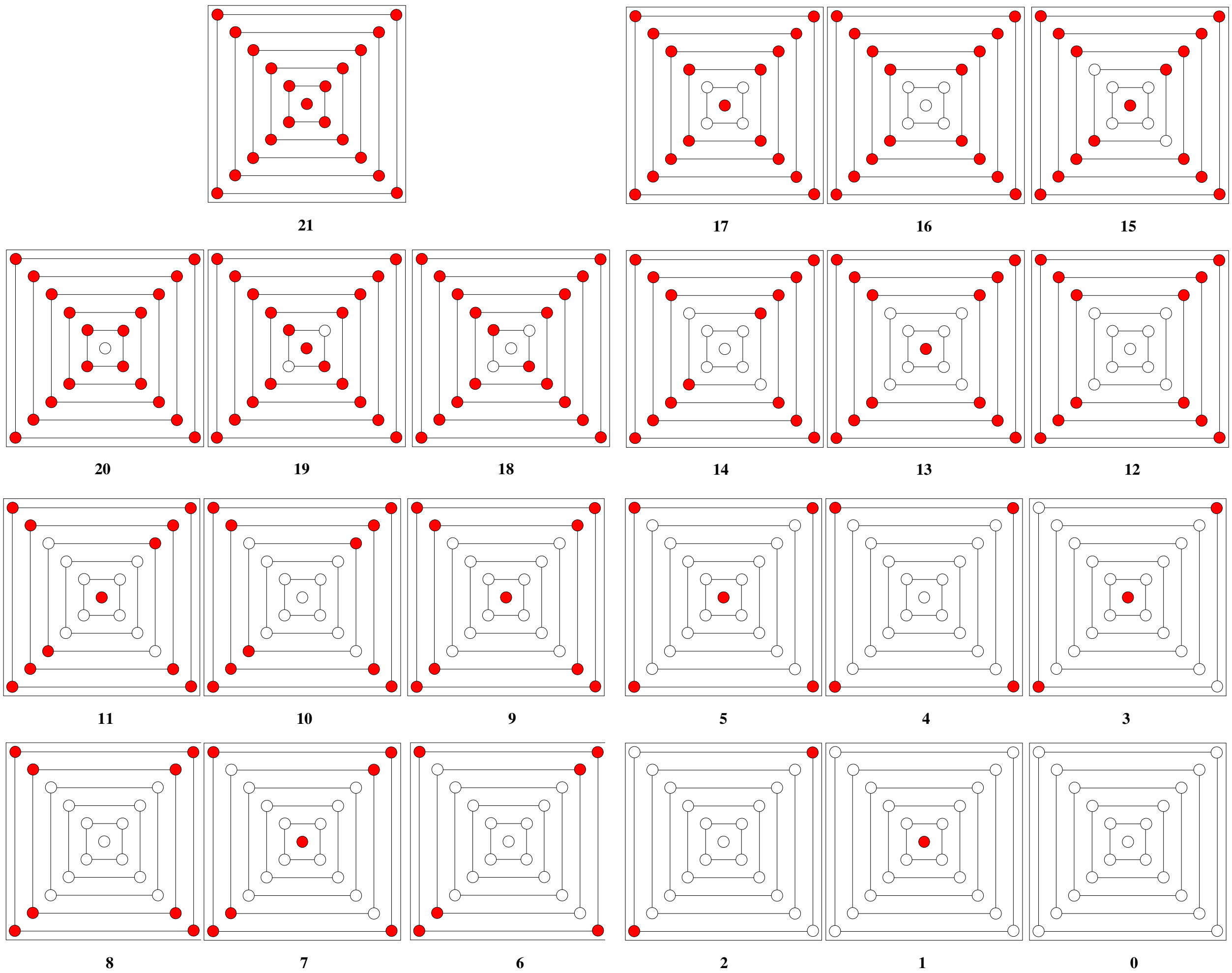
6.4.3.- Jogo da Memória: Complemento de 10 ou de 20

O jogo da memória prevê que os cartões sejam embaralhados e alocados, com as faces para baixo, mais ou menos de forma organizada sobre o tampo de uma mesa. Aqui iremos utilizar apenas uma das famílias de Cartões de Contagem, sejam eles de 0 a 10 ou de 0 a 20.

O jogo é o mesmo Jogo da Memória comum, somente que os pares a serem casados não envolvem cartões idênticos, mas são cartões cujos valores de face devem perfazer uma ‘soma 10’ ou uma ‘soma 20’, dependendo respectivamente da escolha dos cartões para o jogo: Cartões de contagem de 0 a 10 ou Cartões de Contagem de 0 a 20.

6.5.- Outros Cartões de 0 a 21

A seguir vamos apresentar uma família de Cartões para Contagem com a quantidade de elementos variando de 0 a 21.



Com estes novos cartões poderemos jogar os mesmos jogos que os anteriores, bastando adaptá-los para a quantidade 21, ou seja, serão jogos cujo objetivo é a 'Complementação para 21'.

6.6.- Comentário de Cunho Pedagógico

Este novo Conjunto de Cartões de Contagem (de 0 até 21) oferece ao educador e seus alunos uma o rica oportunidade pedagógica: aquela de fazer com que as crianças transfiram para este conjunto de cartões, o que foi aprendido com os jogos anteriores permitindo ao educador observar como as crianças lidam com a transferência de aprendizagens para novas situações.

Por outro lado, isto permitirá ao educador atento, verificar o 'funcionamento ao vivo' de alguns dos conceitos piagetianos tais como: a assimilação e a internalização que, mediada pela equilibração, leva à acomodação dos conhecimentos na estrutura mental do indivíduo.

JARIT#07 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 07
CARTÕES PARA SEQUENCIAÇÃO NUMÉRICO-NUMERAL

Baseados no Tetraktis estes cartões (Cartões-Número e Cartões Numerais) se prestam a um interessante Jogo Para o Pensamento. Estes cartões permitem o estudo da sequenciação em ordem crescente e/ou decrescente de números (quantidades) e seus respectivos numerais (símbolos dos numerais hindu-arábicos).

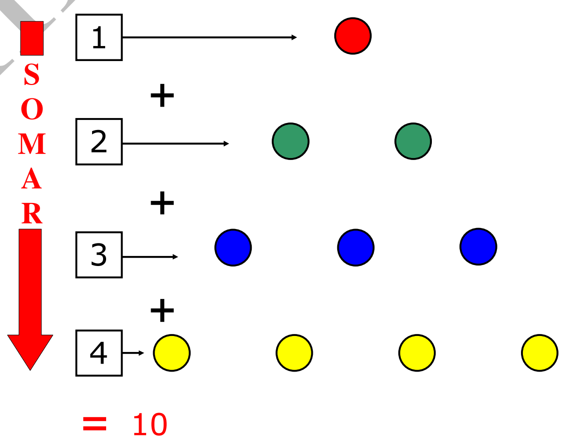
7.1.- Cartões-Números e os Cartões-Numerais Baseados no Tetraktis

Neste JARIT iremos estudar dois modelos de cartões baseados no Tetraktis (vide Apêndice B 'Outros Modelos de Cartões Lógicos Perfurados', no volume 1 desta coleção de livros, item B.5.) destinados à compreensão do conceito de número e numeral.

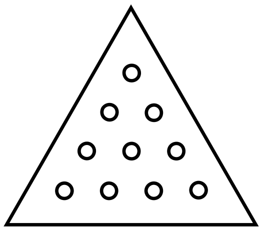
7.1.1.- O Tetraktis

Para Pitágoras e seus seguidores o número 10 era um número sagrado. A forma de obtenção deste número serie através da soma dos 4 primeiro números naturais: **1 + 2 + 3 + 4 = 10**

e sua representação gráfica se daria através da figura mostrada abaixo, um conjunto de 10 'pontos' distribuídos sob a forma de um triângulo.



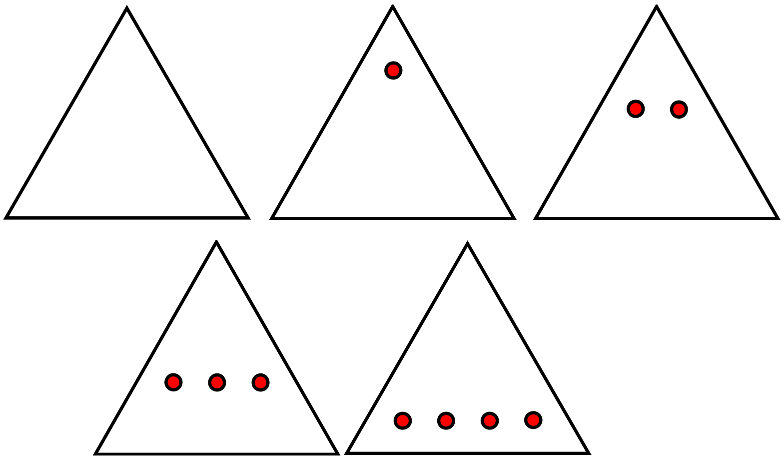
O módulo do cartão-número do Tetraktis – onde os dez elementos podem ser perfurações ou pequenos círculos a serem pintados numa cor destacada – é o seguinte:



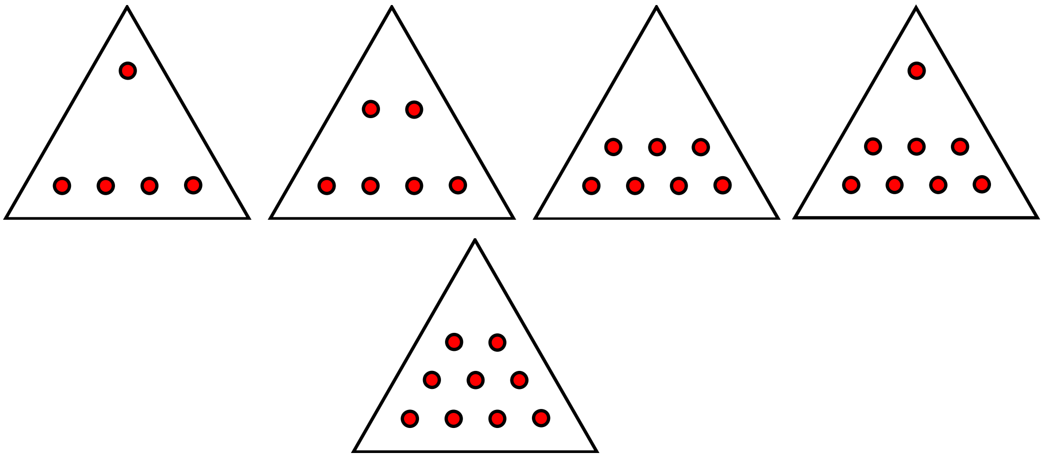
7.1.2.- Uma Sequência de Números Naturais a partir do Tetraktis

Os cartões a seguir não estão propriamente impregnados pelo valor numérico (vide Apêndice B ‘Outros Modelos de Cartões Lógicos Perfurados’, no volume 1 desta coleção de livros, item B.5.), estes são cartões-números (que precisam de contagem para a obtenção do número de pontos).

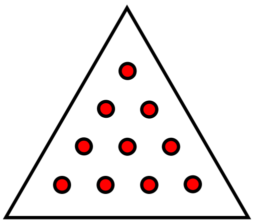
O número zero é representado pela ausência de pequenos círculos; já os valores numéricos 1, 2, 3 e 4, poderão se obtidos de maneira bastante fácil, escolhendo-se , a cada vez, cada uma das linhas que figuram no cartão.



Os demais valores: 5, 6, 7, 8 e 9, serão obtidos através da escolha das linhas que somadas resultem respectivamente nestes números.



E finalmente, o 10 será o próprio Tetraktis sobre o suporte triangular.

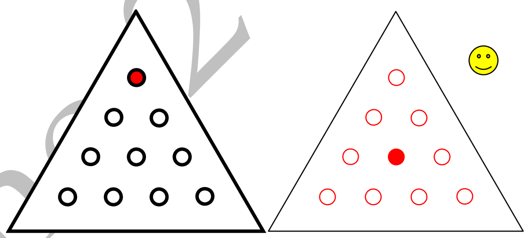


7.1.3.- Estudo de impregnação Numérica

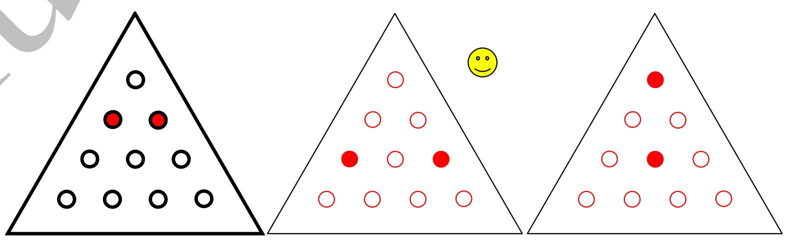
Nas figuras a seguir, a primeira coluna mostra os cartões Tetraktis de 1 até 10, que necessitam de contagem e ao lado de cada um deles a sequência de cartões, onde o que deve ser buscado é a facilidade de apreensão imediata da quantidade representada no cartão, ou seja, quais dos cartões estão melhor impregnados das quantidades que representam. Uma 'carinha feliz' mostra a nosso ver quais das disposições dos furos ou pequenos círculos melhor responde ao nosso intento.

O leitor está convidado a verificar entre os cartões a seguir quais daqueles estão melhor representando as quantidades 1, 2, ..., até 10.

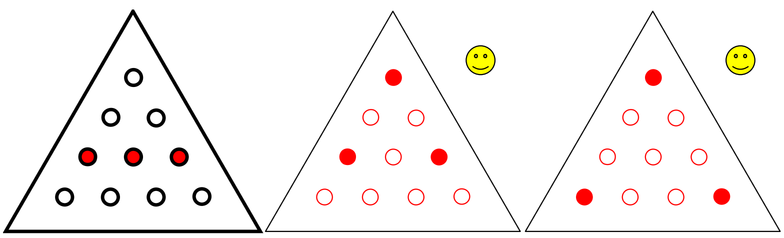
1:



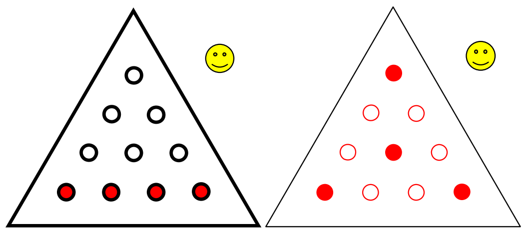
2.-



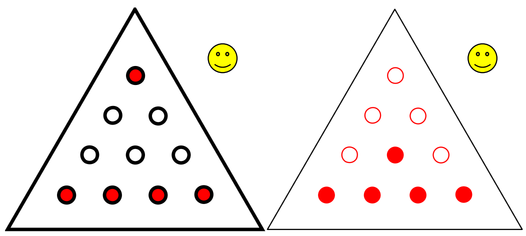
3.-



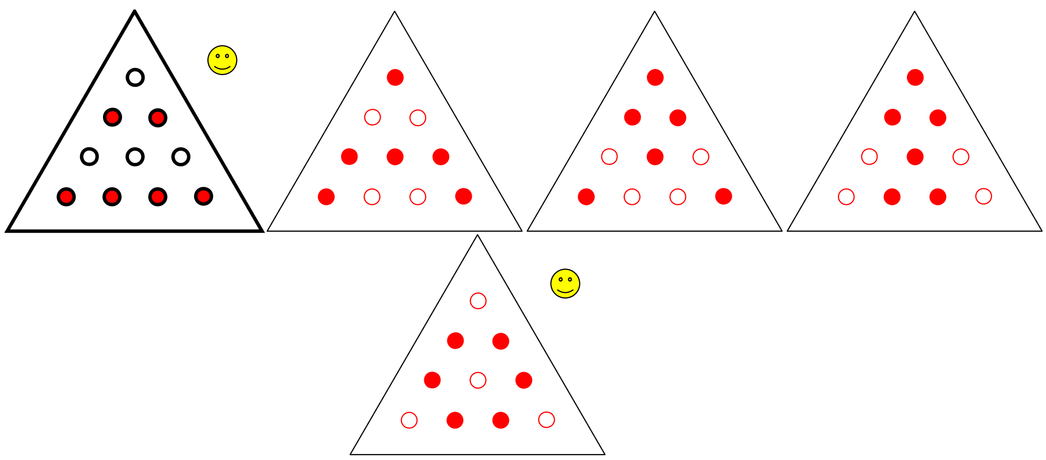
4.-



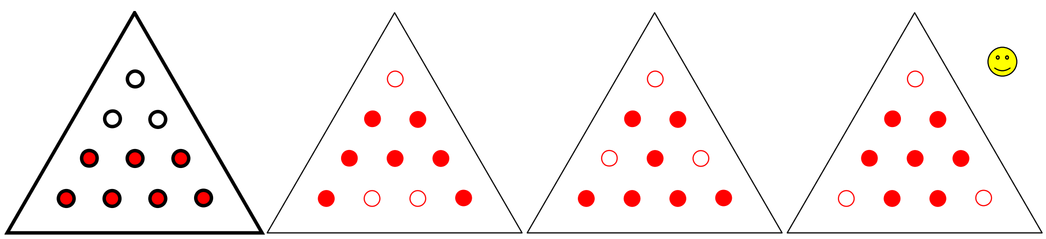
5.-



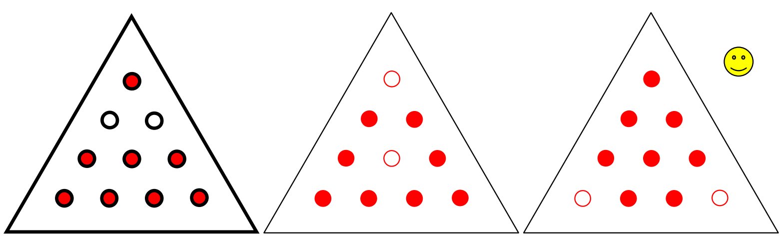
6.-



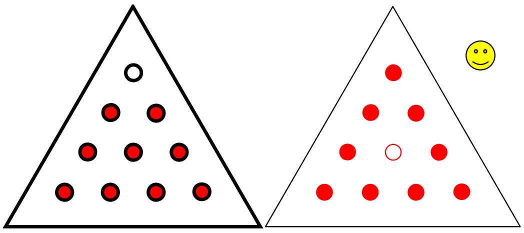
7.-



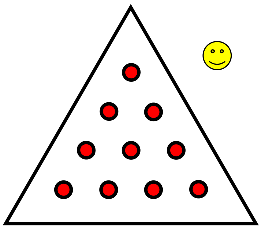
8.-



9.-



10.-

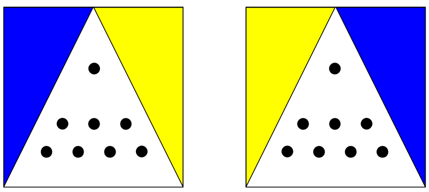


7.2. – Cartões Destinados ao Estudo de Sequenciação Numérica

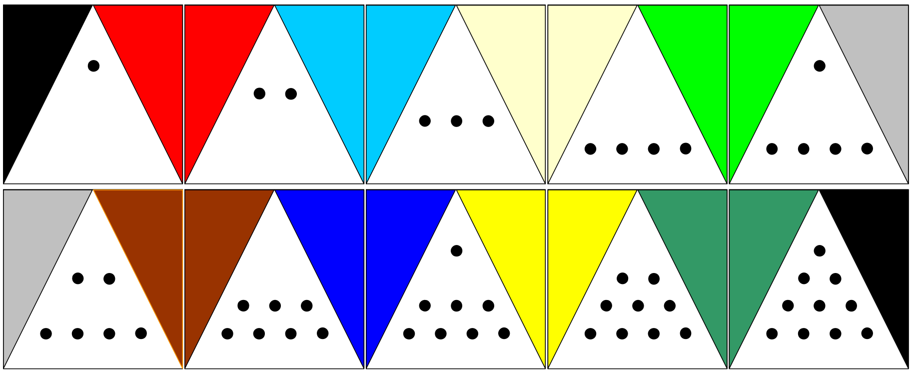
Este material poderá ser utilizado pelos educadores que desejem fazer experimentações de acordo com a Entrevista Crítica Piagetiana (vide Prolegômenos neste volume: item '0.3.1.- A Verificação da Aprendizagem segundo Jean Piaget').

Os cartões apresentados a seguir possuem uma lógica própria em termos de cores e de sequenciamento numérico. A escolha da distribuição dos pequenos círculos se prendeu àquelas propostas no item 7.1.2., acima.

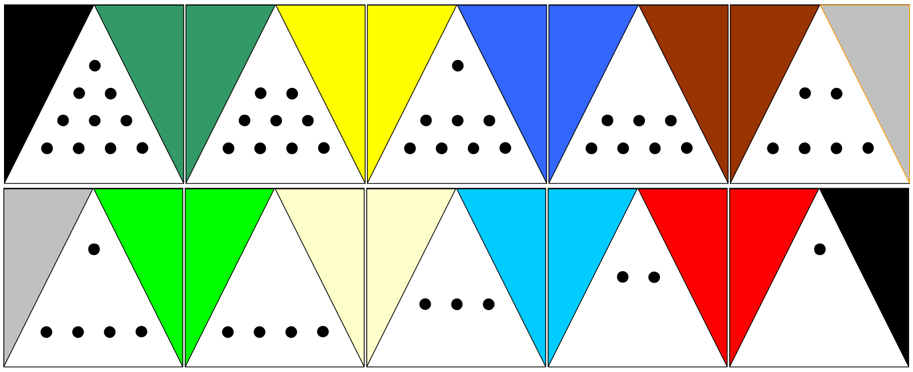
As cores dos triângulos coloridos que limitam as laterais de cada um dos cartões – que tenham a mesma quantidade de pontos – são apresentadas com mesmas duas cores, somente que invertidas conforme mostrada nestes dois cartões com a que representam o número (quantidade) oito:



São 20 os cartões-números (cartões que permitem a contagem das quantidades de pequenos círculos) – para cada número há dois deles com as cores invertidas. Destes 20 cartões, 10 são para sequenciação numérica em ordem crescente e os outros 10 para a sequenciação numérica em ordem decrescente: são os Cartões-Número em Ordem Crescente e os Cartões-Número em Ordem Decrescente, mostrados a seguir.



Cartões-Número em Ordem Crescente



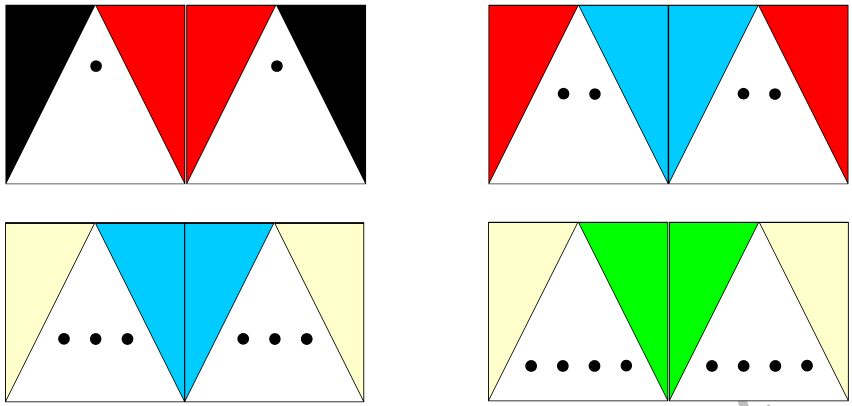
Cartões-Número em Ordem Decrescente

7.2.1.- Jogos Exploratórios com os Cartões-Números

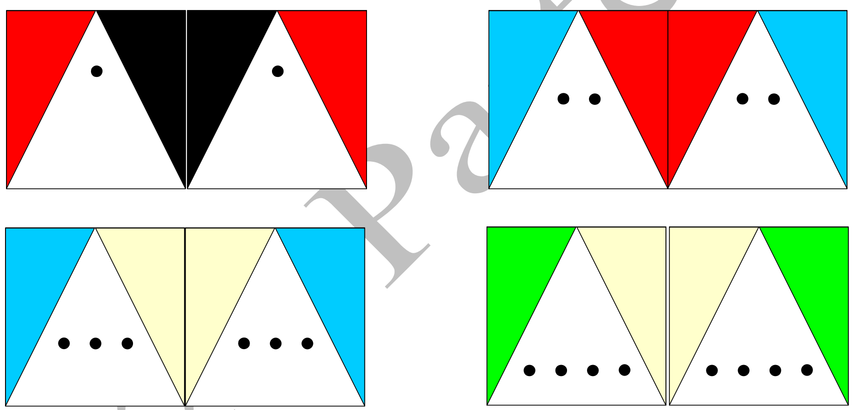
Este jogo é destinado a crianças que saibam contar, mas ainda não reconheçam os numerais (símbolos). O jogo consiste no seguinte:

- Recortar os 20 cartões-números e distribuí-los para um jogador (uma criança que saiba contar).
- Deixe-a jogar livremente solicitando que elas relacionem os cartões através de combinações de cores, ou seja, através do casamento das cores. Aguardar que a criança exiba as suas construções e possa justificá-las logicamente.
- Auxiliar a criança mostrando alguns exemplos iniciais: contendo os números 1, 2, 3 e até mesmo o 4. A criança deve tentar continuar os demais casamentos entre as cores dos cartões restantes (5, 6, 7, 8, 9 e 10).
- Para cada mesmo número ou par de números, há três possibilidades de casamentos de cores, que são mostrados a seguir.

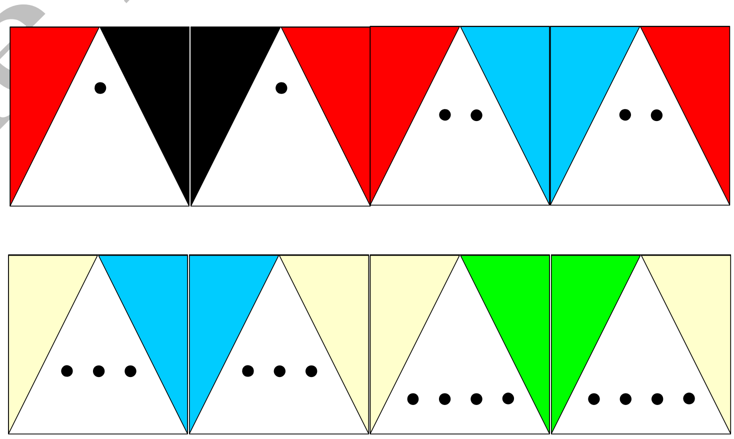
- **1ª Possibilidade:**



- **2ª Possibilidade:**

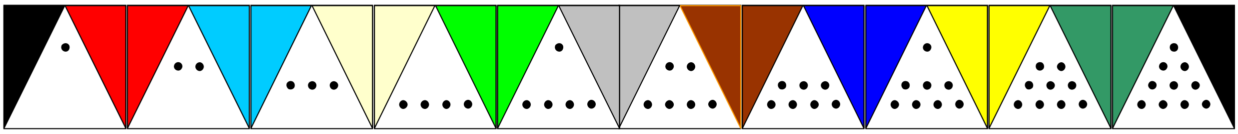


- **3ª Possibilidade:**

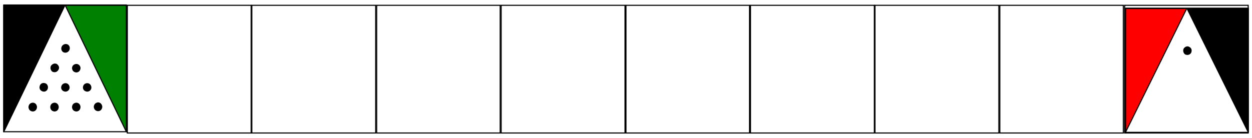


7.2.2.- Jogo de Sequenciamento Numérico

- O aplicador deve mostrar à criança a seguinte sequência de valores (construída com os 10 primeiros cartões-números), deve desfazê-la e solicitar que a criança a refaça.



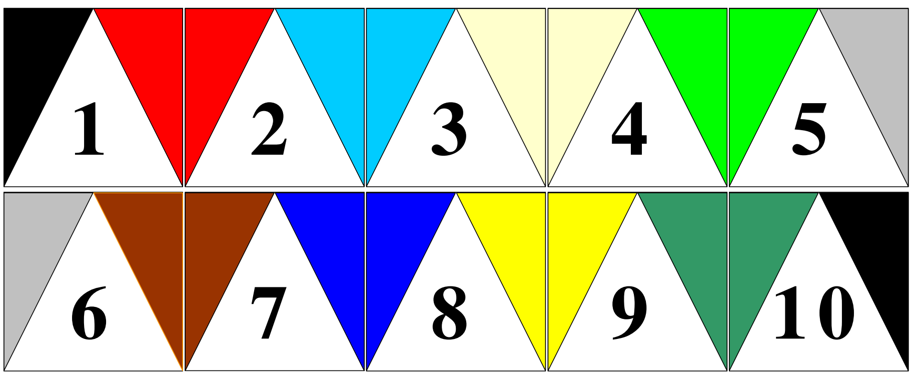
- O aplicador deve agora misturar os 20 cartões-números e solicitar que a criança refaça a sequência anterior, isolando os demais 10 cartões que não fazem parte daquela sequência.
- Tomar os dez cartões remanescentes e solicitar que ela comece uma nova sequência iniciando-a com o Cartão-Número '10'.



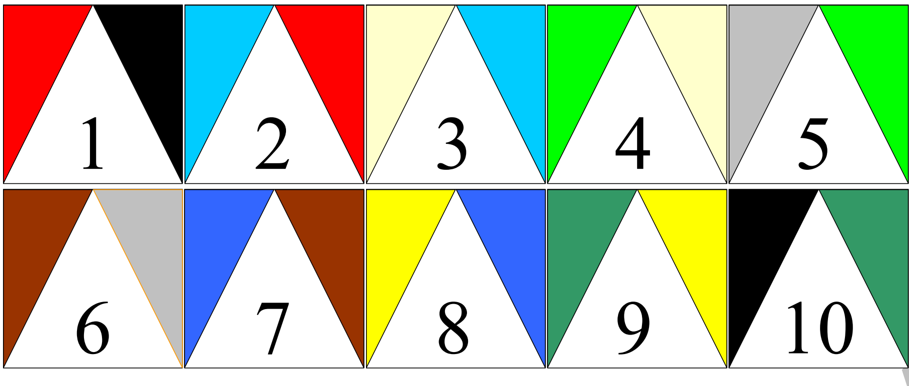
- Reforçar os conceitos de sequência numérica crescente e sequência numérica decrescente, notando que a cor do primeiro e do último triângulo em cada um destes sequenciamentos *sempre* tem a cor preta.
- Separar os números de acordo com a sua paridade e imparidade.

7.3. – Os Cartões-Numerais

São 20 os cartões-numerais (cartões com os símbolos dos numerais hindu-arábicos). As cores de cada um destes Cartões-Numerais corresponde exatamente às cores dos Cartões-Número, bem como também há dois conjuntos destes cartões um que permite o sequenciamento em ordem crescente e outro que permite o sequenciamento em ordem decrescente.



Cartões-Numerais em Ordem Crescente



Cartões-Numerais em Ordem Decrescente

Note que a figura acima não reproduz os cartões em ordem decrescente, valendo lembrar que a cor do primeiro e do último triângulo nos sequenciamentos – sejam eles crescentes ou decrescentes – têm a cor preta.

7.4.- Jogos com os Cartões-Números Mais os Cartões-Numerais

São muitos os *Jogos para o Pensamento* que podem ser levados a efeito envolvendo os Cartões-Números e os Cartões-Numerais. Iremos sugerir alguns destes jogos a seguir, afirmando que muitos outros poderão ser criados pelos educadores interessados.

Os Jogos Exploratórios do item 7.2.1. devem ser repetidos para estes novos conjuntos de cartões.

7.4.1.- Jogo da Correspondência

O educador deve embaralhar todos os 40 cartões – 20 Cartões-Número e os 20 Cartões-Numerais – solicitando a um ou dois alunos que coloque os cartões em correspondência biunívoca:

a) Os de mesmo valor e cores invertida ou não – os grupos assim formados terão 4 cartões cada;
b) Os exatamente iguais (valor e exata correspondência de cores) – os grupos assim formados terão 2 cartões cada.

7.4.2.- Jogos da Memória

Há várias formas de se jogar o jogo da memória com estes cartões. O jogo se inicia com os cartões bem embaralhados sendo dispostos sobre o tampo de uma mesa com suas faces voltadas para baixo:

7.4.2.1.- O Jogo da Memória Tradicional com 20 Cartões

O Jogo da Memória tradicional é aquele em que se prevê o casamento de pares idênticos ou equivalentes, no caso queremos o casamento de pares equivalentes: o número (quantidade) casado com o numeral correspondente.

a) Tomar um conjunto de Cartões-Número e o seu correspondente Conjunto de Cartões-Numerais;
b) Os casamentos devem ocorrer nos seguintes termos: a quantidade (número) deve corresponder ao seu respectivo numeral.

7.4.2.2.- O Jogo da Memória Tradicional com 40 Cartões

É o mesmo jogo anterior onde serão utilizados todos os 40 cartões, exigindo que algumas novas regras devam ser acrescentadas:

c) Qualquer um dos jogadores, na sua vez de jogar, que desvirar os dois cartões, se não conseguir um par, deve manter então um cartões desvirado à escolha (ou não) de seu oponente (isto deve ser combinado), isto é, após cada jogada que não resulte em um casamento, um dos dois cartões deve permanece com a face virada para cima.
d) Também a ser combinado deve ser o seguinte: o casamento deve ser apenas 'número+numeral' ou deve-se exigir 'número+numeral+cores laterais idênticas'?

7.4.2.3.- O Jogo da Memória Complemento de 11

Este jogo da memória é aquele em que a soma dos valores dos pares de cartões deve ser igual a um dado valor pré-estabelecido, no caso o valor deve ser o 11.

Há 4 variantes para este jogo:

1a. Jogar apenas com um dos conjuntos de cartões – apenas 10 cartões. Variar, adotando: ora o conjunto de Cartões-Número, ora o de Cartões-Numerais.

2a. Jogar com dois dos conjuntos: um de Cartões-Números e um de Cartões-Numerais correspondentes (ambos crescentes ou ambos decrescentes). Neste caso, o casamento dos cartões tem ainda a finalidade de perfazerem os 11 pontos – a 'soma 11' –, sendo aceitos pares do tipo número+número, numeral+numeral

ou então número+numeral – possibilidades estas que devem ser combinadas já no início de cada partida.

3a. Jogar com os 4 conjuntos de cartões, combinando antes o tipo de casamento a ser aceito para perfazer a ‘soma 11’: número+número, numeral+numeral ou então número+numeral. Aqui como estaremos jogando com 40 cartões há uma outra regra que pode ser adotada: um dos jogadores desvira dois cartões, se não conseguir um par, deve manter então um cartões desvirado à escolha (ou não) de seu oponente (isto também pode ser combinado), isto é, após cada jogada que não resulte em um ‘complemento de 11’, um dos dois cartões deve permanece com a face virada para cima.

7.5.- Comentários Finais

Como dito anteriormente (item 7.2.) estes cartões número e numeral poderão ser utilizado pelos educadores que desejem fazer experimentações. Esperamos que o leitor tenha tentado, ou venha a tentar, algumas destas experimentações, com as quais normalmente conseguimos aprender com as crianças e sobre a forma de pensar das mesmas.

JARIT#08 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 08

Escrevendo os Numerais até 99 e Além

Neste JARIT iremos exibir alguns materiais que criam oportunidades de aprendizagem da escrita dos numerais hindu-arábicos do zero até o 9, bem como aqueles números que ultrapassam o valor 99, ou seja, as centenas, os milhares e além. As Reguinhas de Itar/Séguin, as Fichas de Trabalho UDCM, o Ábaco UDCM, o Caderno UDCM irão oportunizar às crianças a compreensão sobre a composição, a escrita e a decomposição dos números hindu-arábicos.

8.1.- A Escrita dos Numerais Hindu-Arábicos até 99

Quando estamos contando objetos nós podemos agrupá-los, por exemplo, de 12 em 12 quando o que queremos e obter *dúzias* e *grosas*, ou seja, *uma dúzia = 12 unidades* e *uma grosa = 12 dúzias = 144 unidades.* Neste caso o nosso sistema de numeração ou contagem é de base 12 (duodecimal).

No caso de queremos agrupar estes mesmos elementos de 10 em 10, estaremos adotando um sistema de numeração ou contagem decimal ou de base 10. Já falamos exaustivamente sobre dois sistemas decimais: o *hindu-arábico* e o *romano* (vide item 1.5. no JARIT#01). O sistema de numeração hindu-arábico é um sistema de base 10. O sistema de numeração romano também é de base 10.

8.1.1.- Propriedades notáveis do Sistema Hindu-Arábico de Numeração

O *hindu-arábico* é um sistema de numeração posicional: um mesmo símbolo muda de valor à medida que ocupa uma posição distinta: como em 752, 725, 275, 257, 572 e 527.

O Sistema de Numeração hindu-Arábico tem dois princípios bastante notáveis:

- O *Princípio Multiplicativo* que nos permite decompor o número 752 como:

$$752 = 7\times100 + 5\times10 + 2\times1$$

- O *Princípio Aditivo* que nos permite decompor o número 752 em 7 centenas, 5 dezenas e 2 unidades, como:

$$752 = 700 + 50 + 2$$

O sistema de numeração Romano não é posicional, e daí não possuir nenhum destes dois princípios, conforme pode ser visto nestes dois exemplos:

- MCCCXXVII = 1000 + 100 + 100+ 100 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1

- A leitura de MMCXLVIII :

Errada: MMCXLVIII = 1000 + 1000 + 100 + 10 + 50 + 10 + 5 + 1+ 1 + 1

Correta: MMCXLVIII = 1000 + 1000 + (100 – 10) + (50 – 10) + (5 + 3)

8.2.- Reguinhas Para a Composição dos Numerais até 99

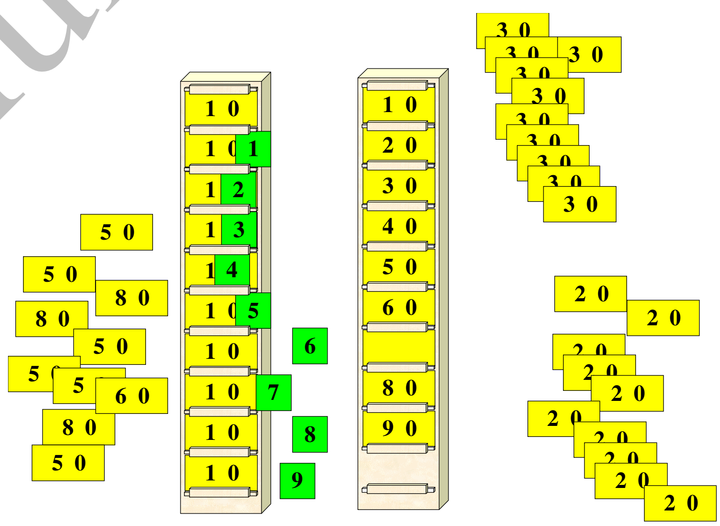
Resolvemos denominar estas reguinhas como *'Reguinhas de Itard/Séguin'* que, se não foram diretamente criadas por eles, os seus nomes pelo menos servem para lembra onde é que Maria Montessori foi se inspirar.

As reguinhas numéricas e o respectivo suporte para as mesmas são a adaptação realizada por Maria Montessori para as idéias de Édouard Séguin (1812-1880) que foi aluno de Jean-Marc-Gaspard Itard (1775-1838) cujas idéias o influenciaram.

Séguin abriu escolas para a educação de crianças com necessidades especiais adotando ali materiais psicopedagógicos concretos, assim como Maria Montessori viria a fazê-lo, só que em maior escala. Francês, Séguin migrou para os Estados unidos em 1849 onde deu continuidade a seu trabalho.

8.2.1.- Reguinhas Numéricas de Itard/Séguin

Estas são as reguinhas e os suportes originalmente modelados por Maria Montessori, possivelmente a partir de uma idéia de Séguin. Este material é de difícil confecção quando se pensa que os suportes – bastante delicados, pois devem ser elaborados em madeira –, no entanto apesar de poderem ser adquiridos em lojas virtuais americanas e chinesas (via Internet), têm um alto custo financeiro.

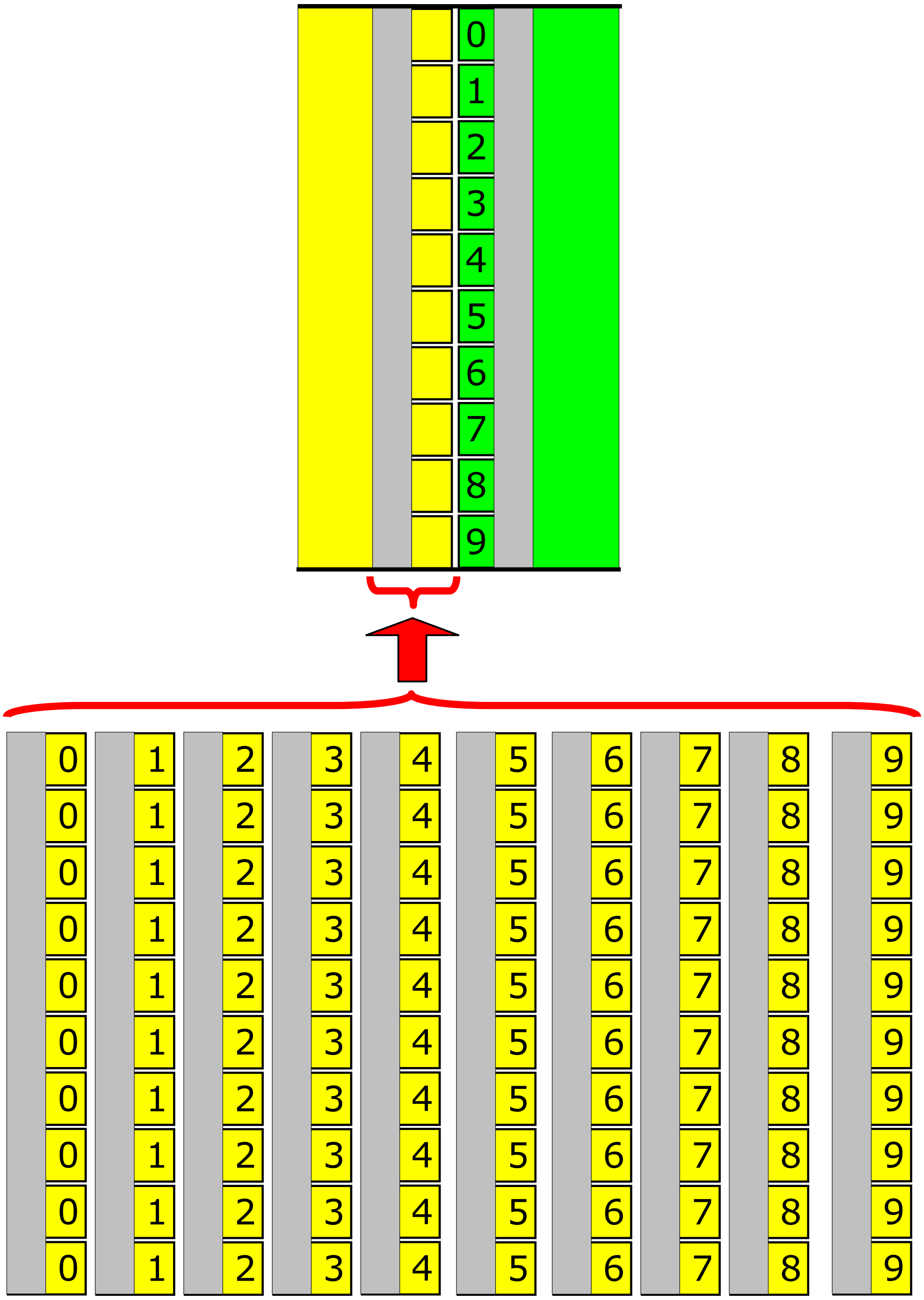


A seguir iremos propor um material alternativo que pode substituir as reguinhas montessorianas originais (ou Reguinhas Numéricas de Itar/Séguin) com relativa vantagem.

8.3.- Reguinhas Numéricas (Alternativas) de Itard/Séguin

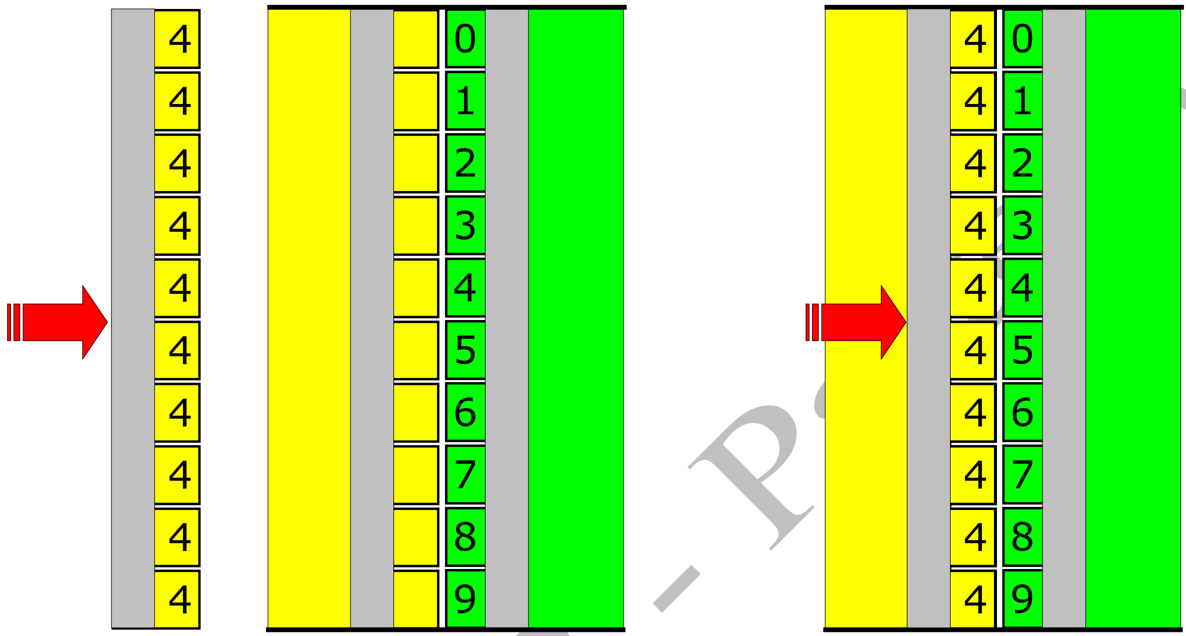
A composição dos numerais de 0 até 99 pode ser conseguida, com relativa vantagem, utilizando as tabelas que serão mostradas a seguir.

8.3.1.- Tabela com dezenas variáveis e com as unidades fixas de 0 até 9

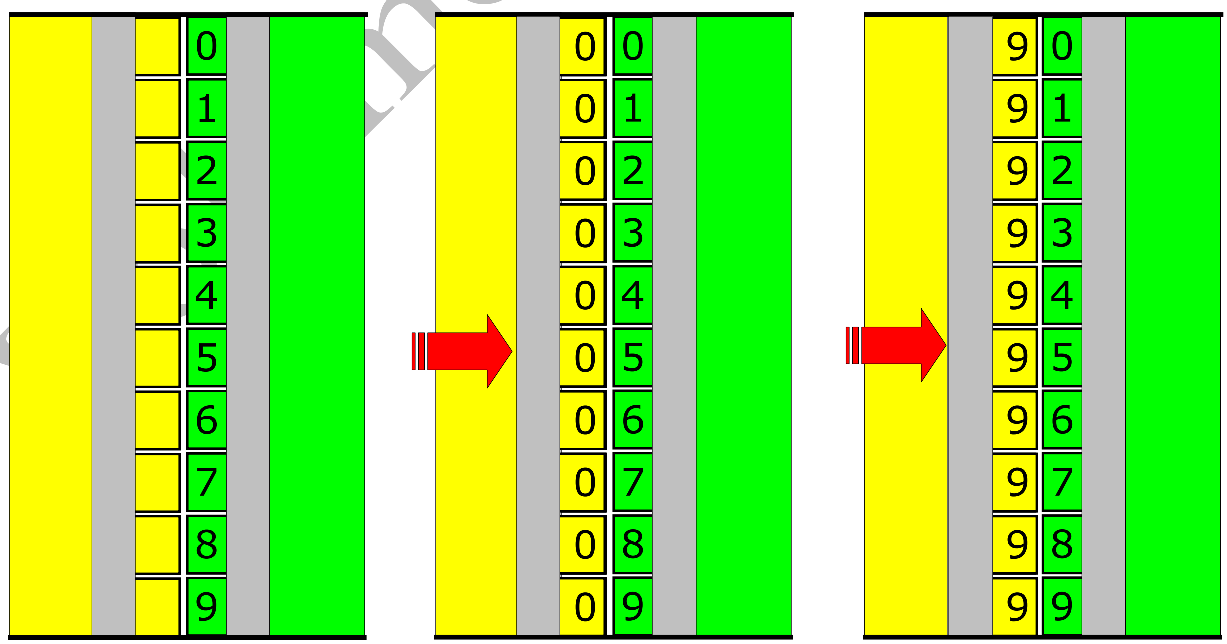


As tiras com os numerais sobre o fundo amarelo devem ser sobrepostas à tabela cujas unidades que estão sobre fundo verde para a composição dos numerais de 00, 01, 02, etc, até 90, 91, ..., 99. Como mostram três exemplos a seguir:

- ***Composição dos numerais de 40 a 49 -*** Sobrepor à tabela a tira correspondente a 4 dezenas, como mostrado a seguir:

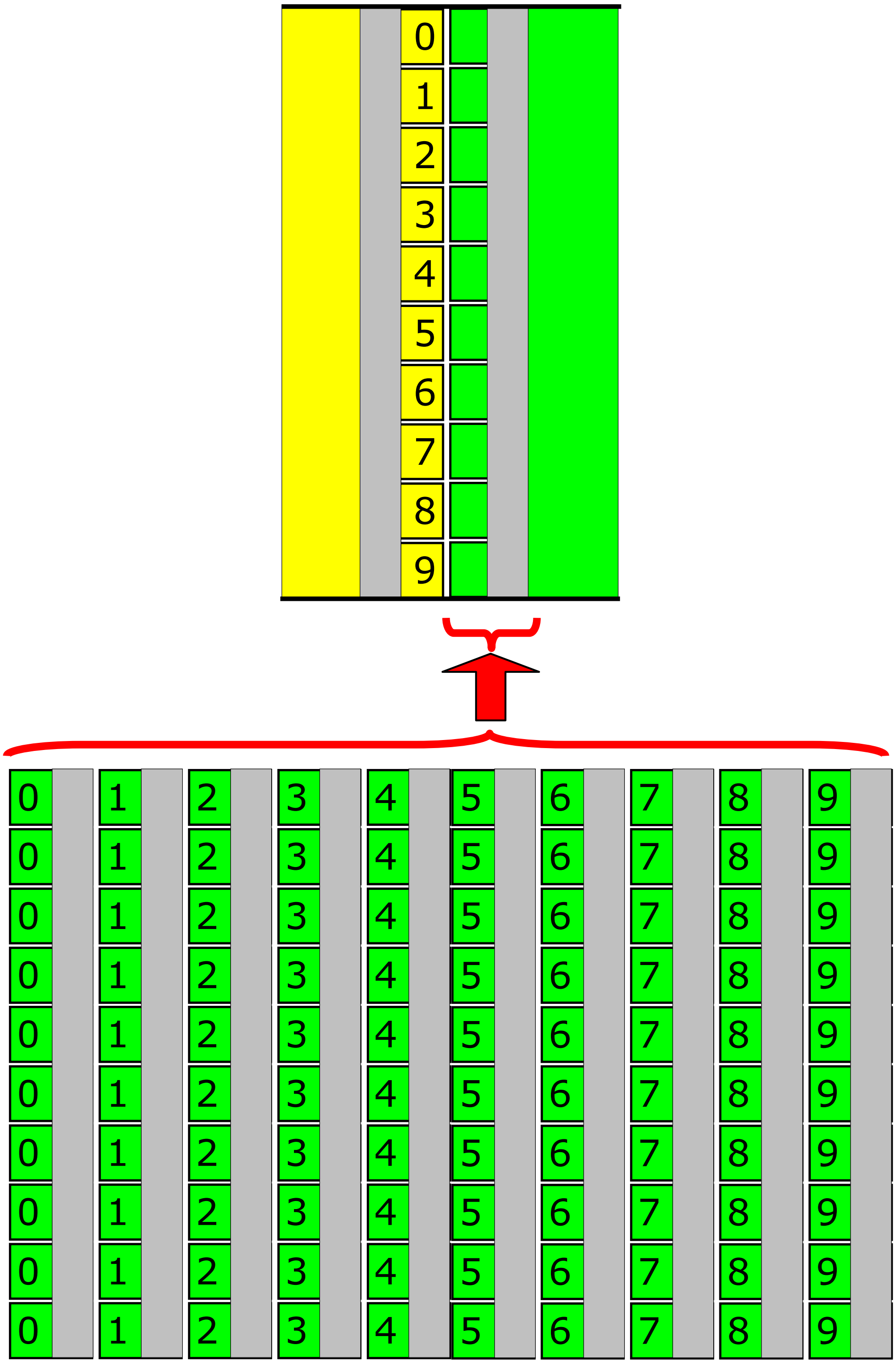


- ***Composição dos numerais de 00 a 09 e de 90 até 99 -*** Sobrepor à tabela ora a tira correspondente a 0 dezenas, ora a tira correspondente a 9 dezenas, como mostrado a seguir:



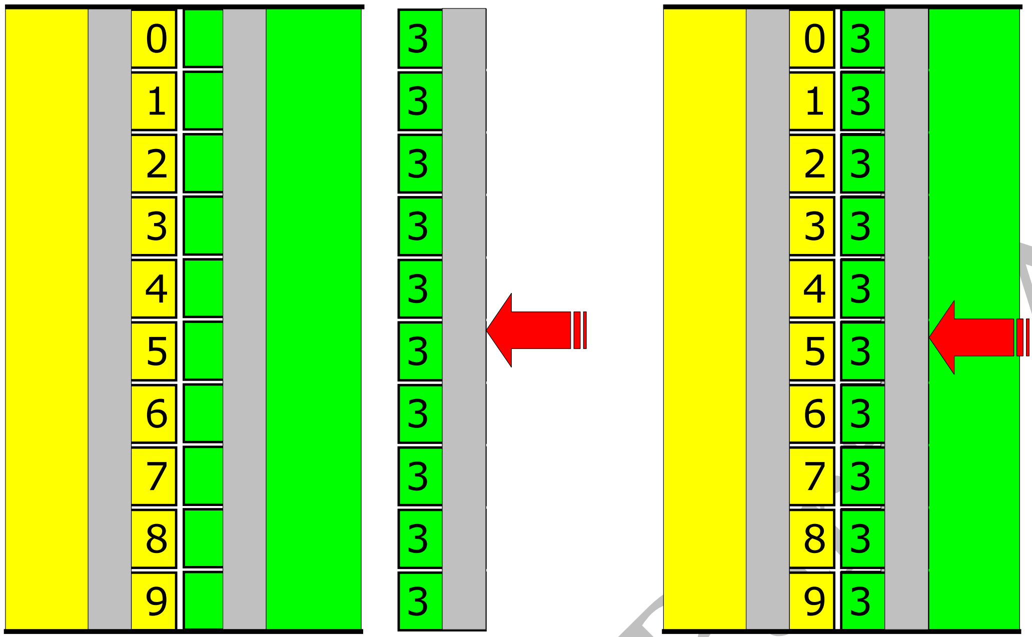
8.3.2.- Tabelas de todas as dezenas de 0 ate 9 com uma mesma unidade

Aqui as dezenas (de 00 até 90) estarão fixas na tabela e as tiras correspondentes às unidades é que deverão ser sobrepostas à tabela:



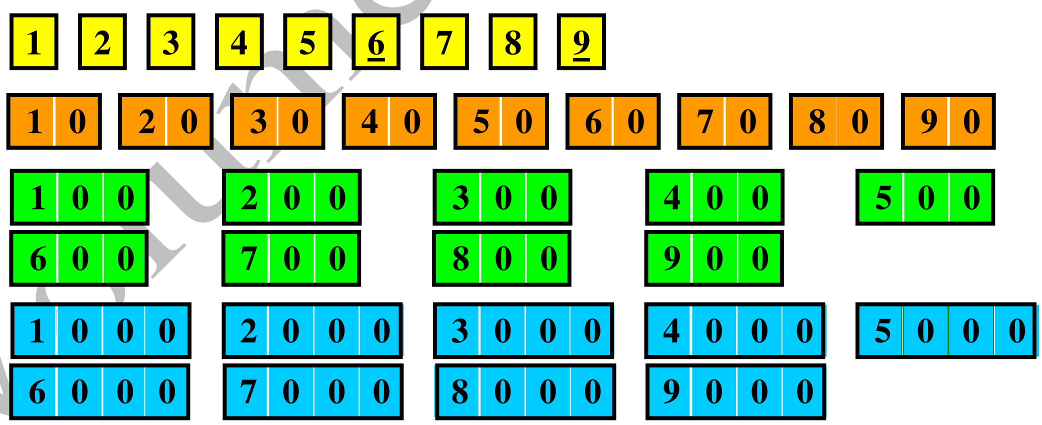
A seguir mostramos como exemplo a sobreposição da tira correspondente a 3 unidades sobre a tabela das dezenas:

- ***Composição das numerais de 03 a 93 -*** Sobrepor à tabela a tira correspondente a 3 unidades, como mostrado a seguir:



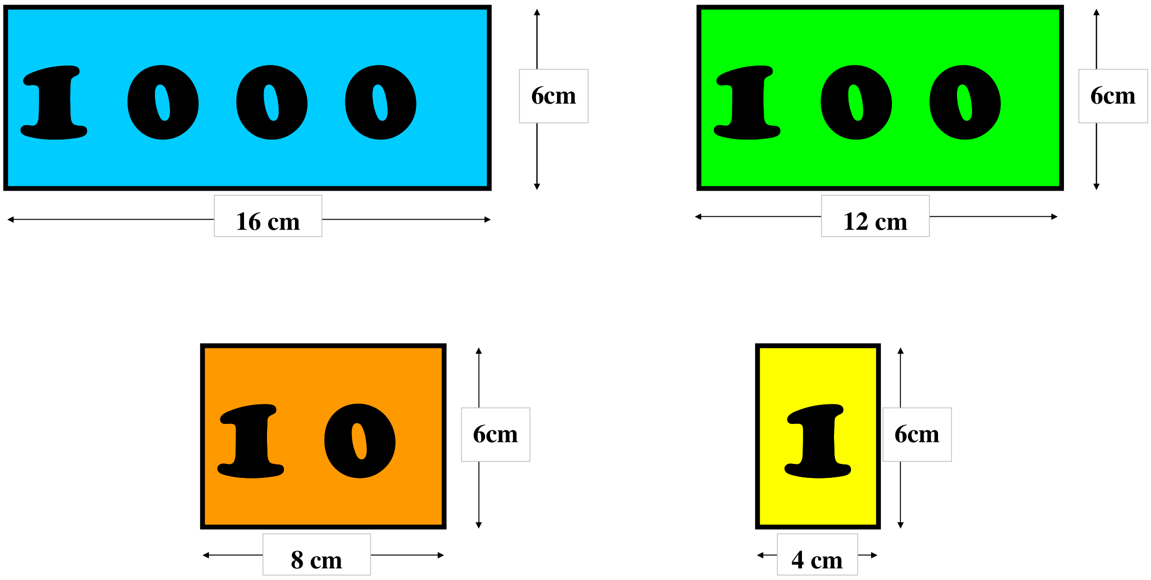
8.4.- Fichas UDCM Coloridas

Já vimos neste livro exatamente no item 0.7.4.8. dos Prolegômenos as fichas que denominamos UDCM (Unidade, Dezena, Centena e Milhar). Vamos estuda-las em detalhes e propor a elaboração de um material bastante interessante para a aprendizagem da composição dos números de 0000 até 9999.

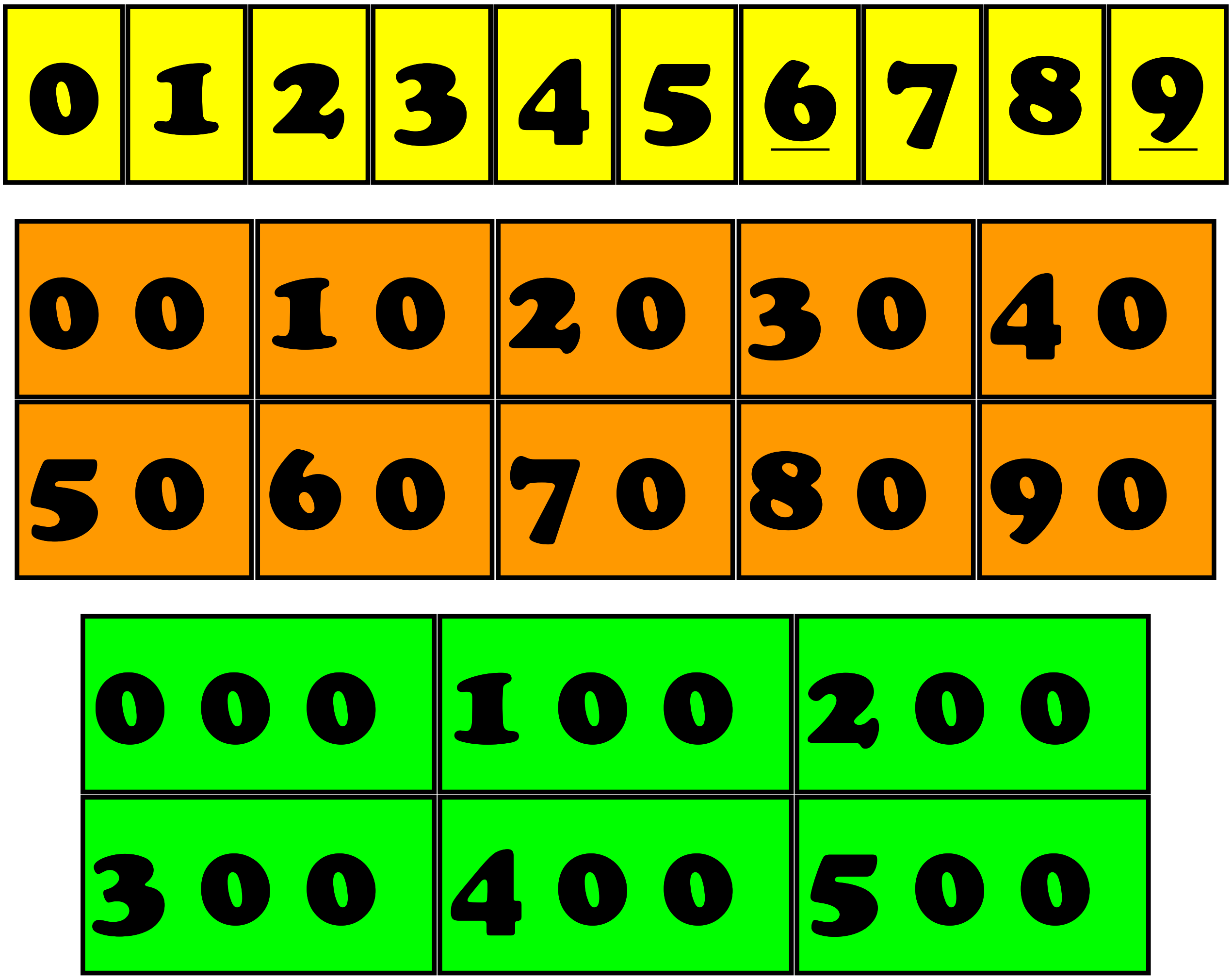


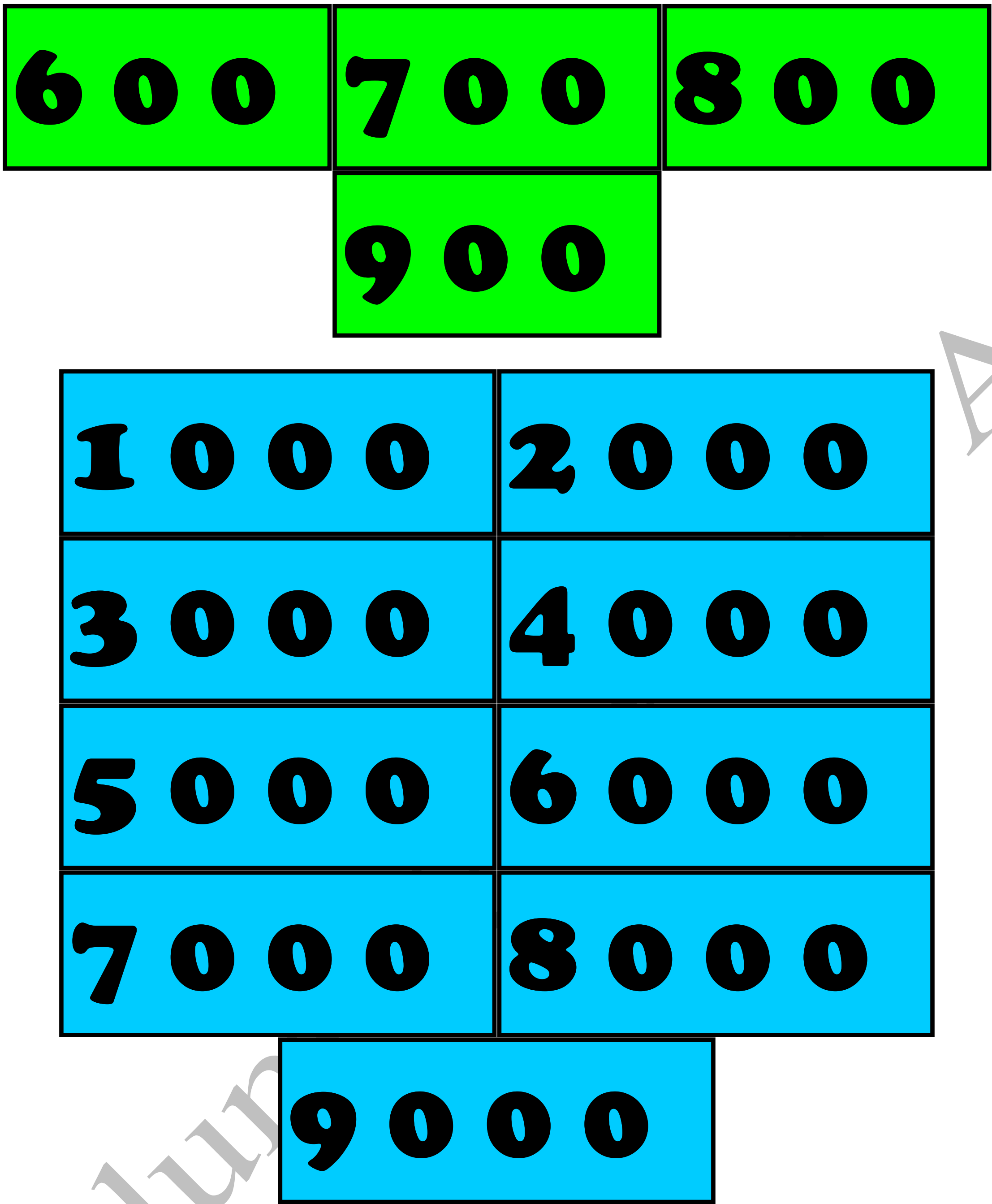
8.4.1. – Elaboração de "Fichas de Trabalho" UDCM

No CD-R que acompanha este livro o leitor irá encontrar as fichas de trabalho UDCM em tamanho grande medindo 16,5cm de largura por 6cm de altura. Elas devem ser impressas, plastificadas e finalmente recortadas para poderem ser utilizadas.



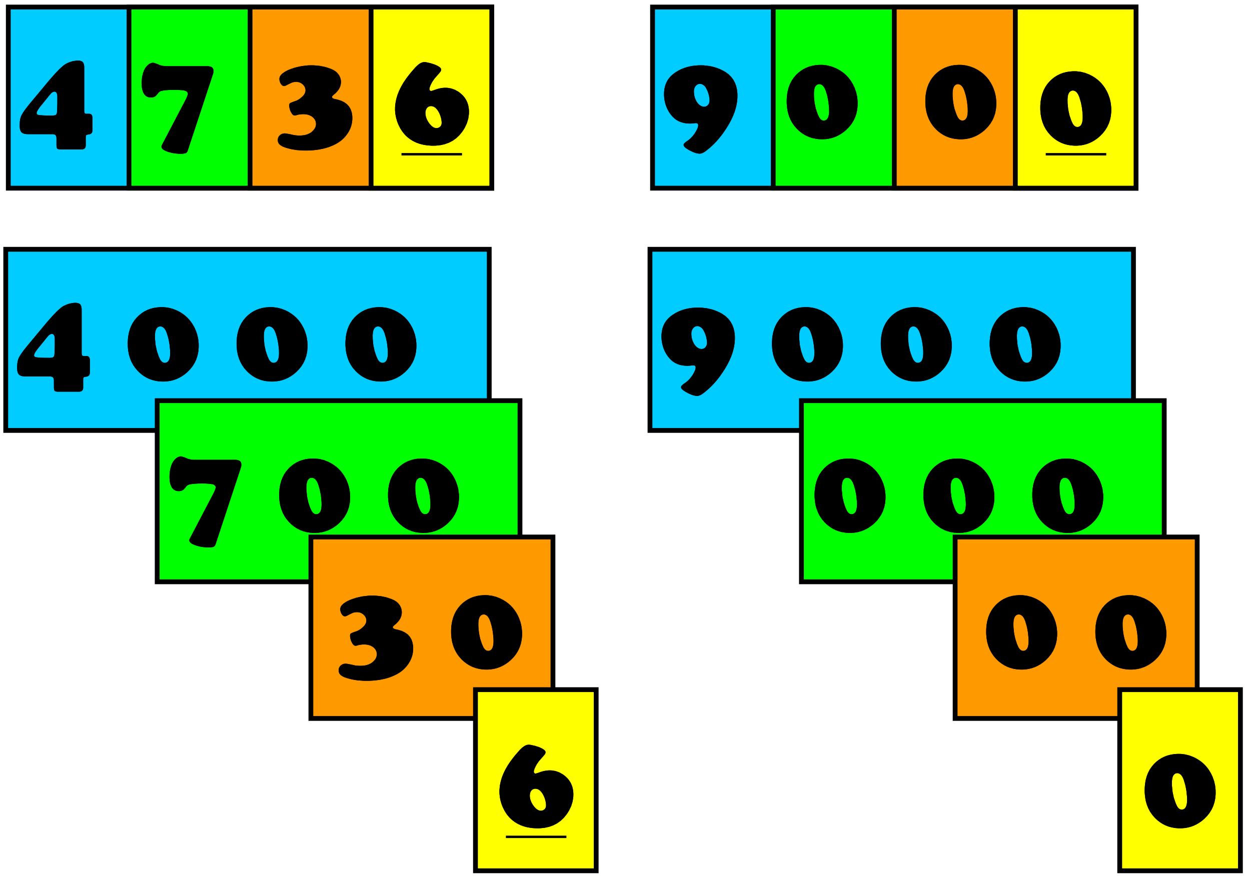
Veja a seguir o conjunto completo destas fichas





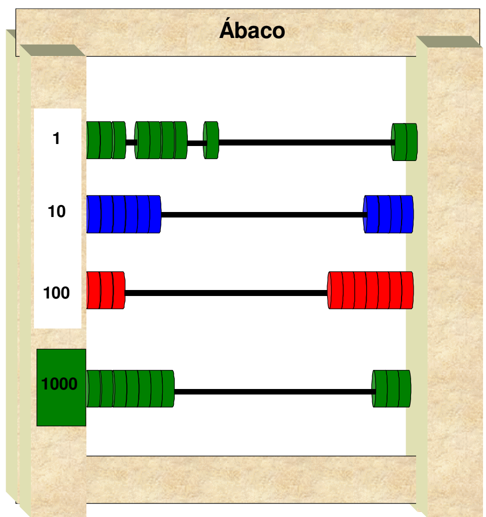
O leitor mais atento irá verificar que as Fichas UDCM das unidades tem o “0”, a das dezenas tem o “00”, e a das centenas tem o “000”, no entanto das Fichas UDCM correspondentes ao milhar não consta o valor “0000”. Por que será?

8.4.1.1.- Alguns Exemplos de Composição e Decomposição



8.5.- O Uso do Ábaco UDCM Com Contas Coloridas

O trabalho com o material denominado Fichas UDCM quando associado a um ábaco com contas coloridas para as unidades, dezenas e centenas e milhares, tornará a aprendizagem altamente significativa e efetiva. Um ábaco bastante adequado é mostrado abaixo, onde o Princípio Multiplicativo do sistema de numeração hindu-arábico poderá ser explorado de forma concreta.

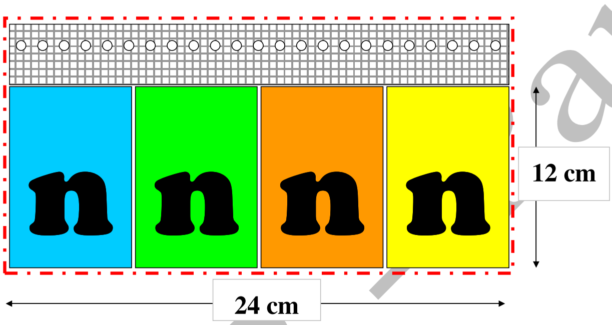


Naturalmente as cores do ábaco não precisam corresponder às cores da Fichas UDCM, pois isto não permitirá esta identificação por cores, o que não é necessariamente uma propriedade a ser exigida: cores de unidades, dezenas, centenas e milhares se correspondendo nos diversos materiais utilizados para o estudo/aprendizagem deste sistema de numeração.

8.6.- O Caderno UDCM

Um material extremamente rico será apresentado a seguir. Trata-se de um ‘Caderno’ dedicado à a composição dos numerais de 0 até 9999, contendo doze páginas grupadas através de um espiral de plástico.

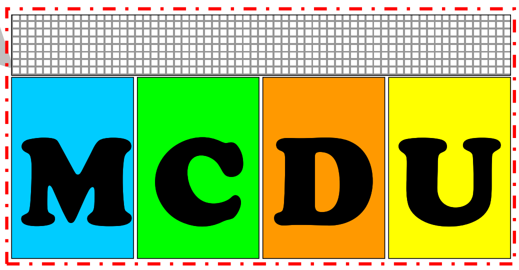
Veja abaixo o *Modelo Básico* de uma página do nosso ‘Caderno’ que inicialmente deverá ser recortada apenas nas bordas (veja a linha tracejada em vermelho):



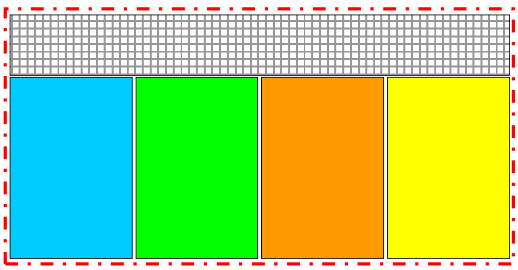
O Caderno assim estruturado é de difícil confecção, mas o leitor/educador verá que o trabalho e/ou o esforço, valerá muito a pena.

Imprimir cada uma das 13 páginas do caderno, plastificar, recortar nas linhas tracejadas (em vermelho) e levar a uma loja especializada para que as páginas sejam perfuras e montar o caderno utilizando uma espiral de plástico.

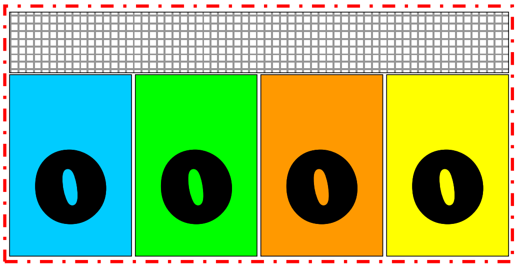
1. Imprimir as 13 páginas contidas no CD-R que acompanha este livro;
2. Veja a sequência das páginas abaixo, numeradas na ordem de entrada (de cima para baixo de 1 até 13) no caderno:



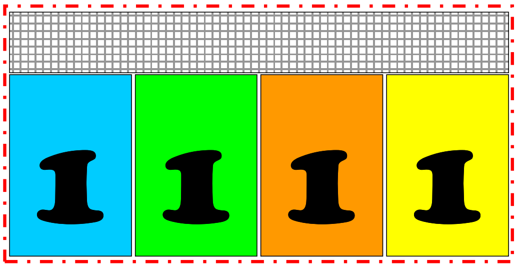
Página 1



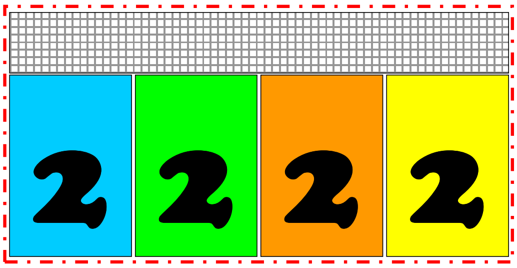
Página 2



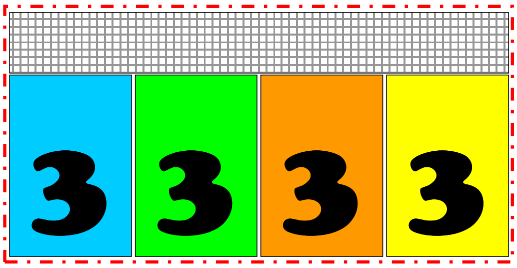
Página 3



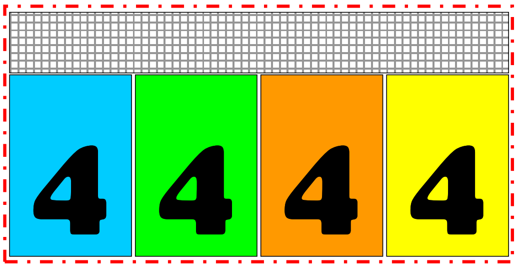
Página 4



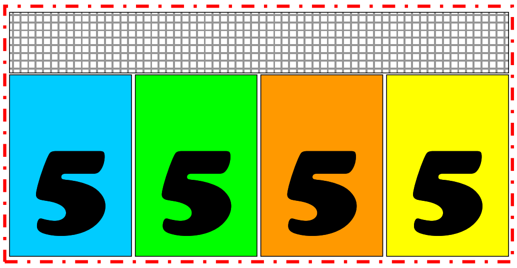
Página 5



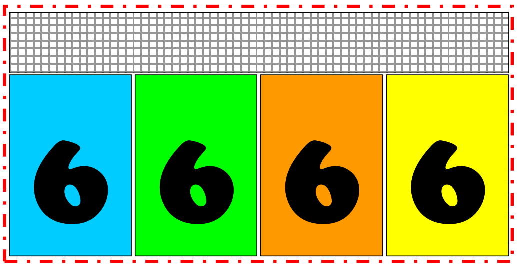
Página 6



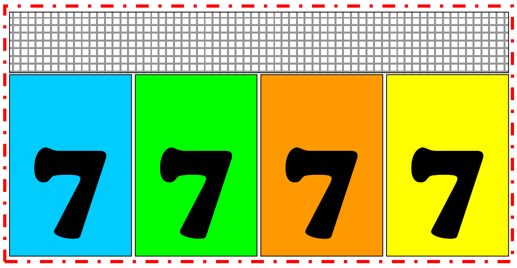
Página 7



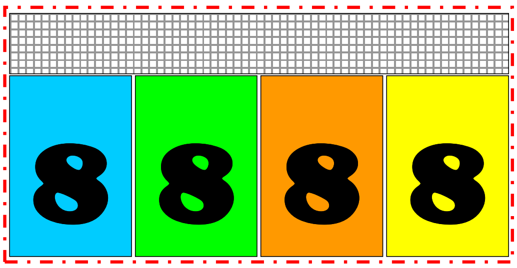
Página 8



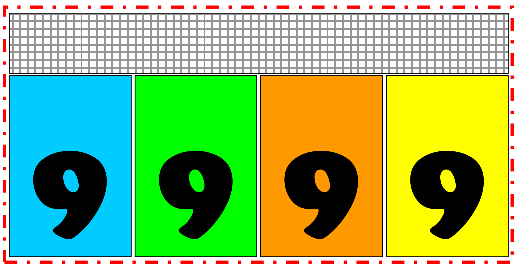
Página 9



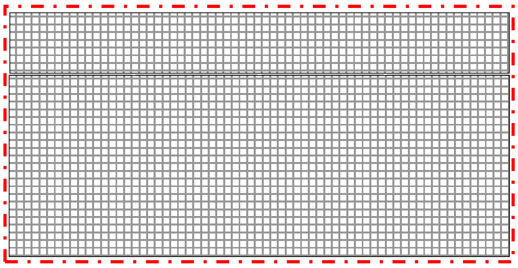
Página 10



Página 11



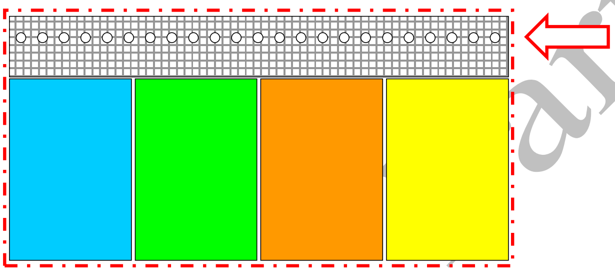
Página 12



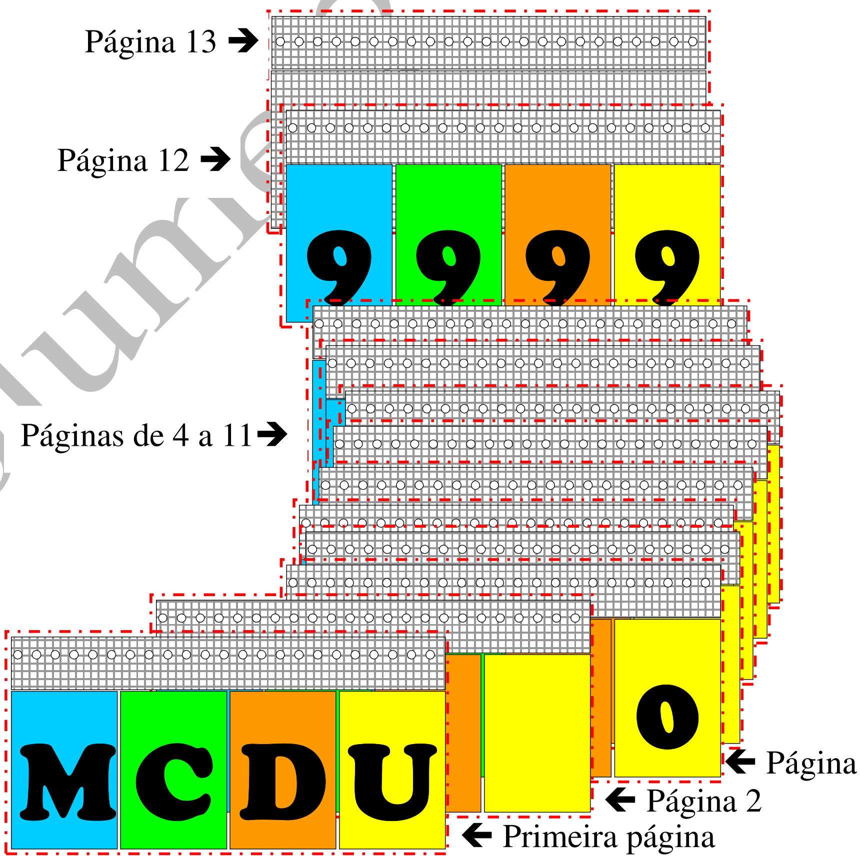
Página 13

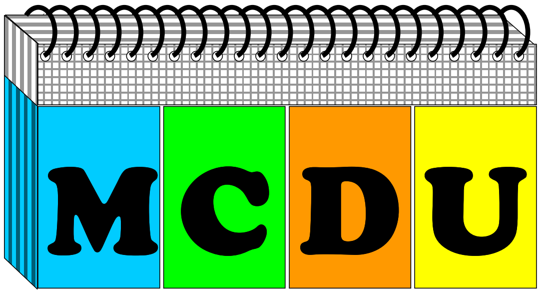
3. Plastificar cada uma das 13 páginas

4. Perfurar cada uma das 13 páginas conforme indicado a seguir (você encontrará a máquina para este procedimento em lojas que 'tiram' Xérox e que encadernam apostilas):



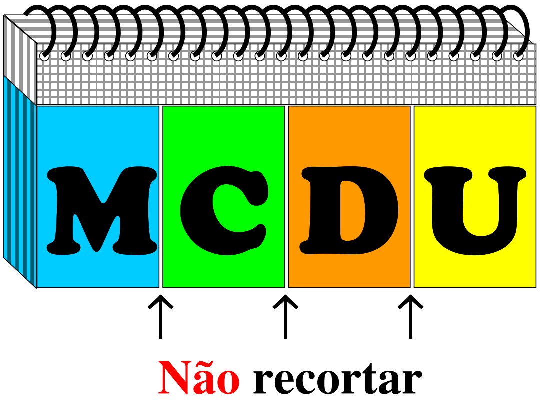
5. Montar o caderno e colocar a espiral de plástico

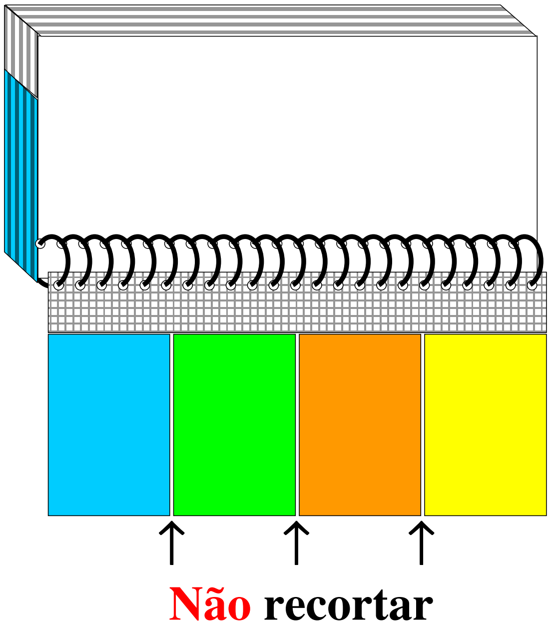




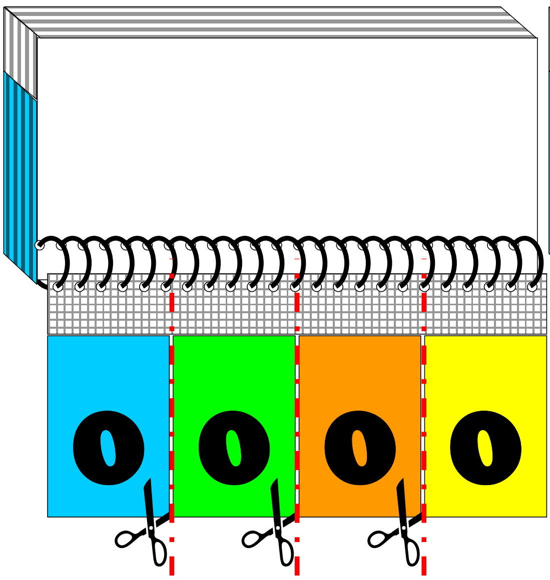
6. **ATENÇÂO: esta é a última etapa da elaboração do Caderno UDCM:**

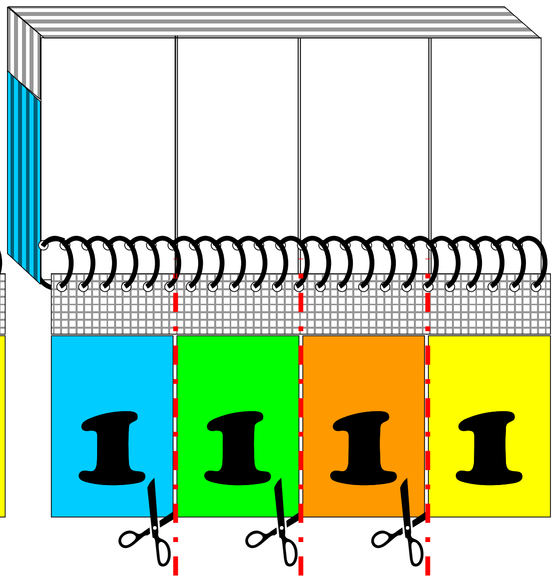
   a. Manter intactas as duas primeiras páginas do caderno (**Não recortar!**):



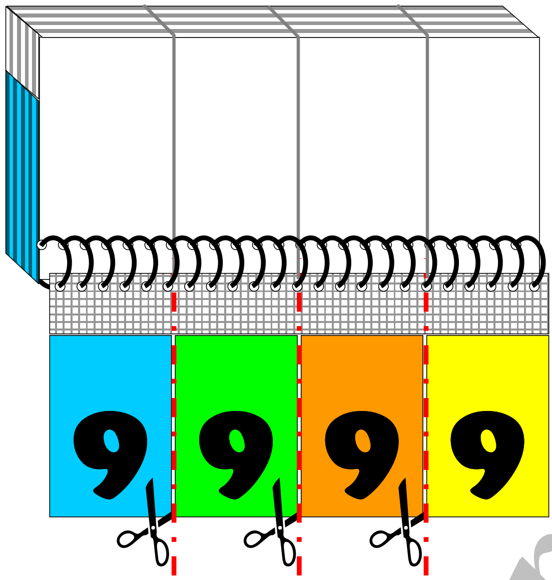


   b. **Recortar** nos locais indicados (usando uma tesoura adequada) as páginas de 3 até 12, tomando cuidado para não cortar o espiral (o espiral deve manter o caderno com as páginas agrupadas):

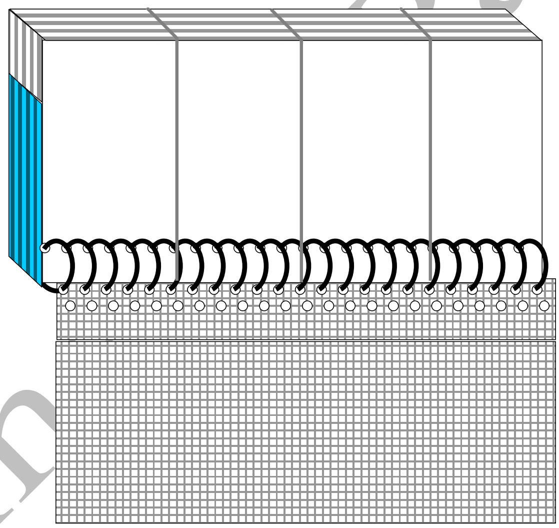




c. Continuar o processo de corte até a página 12:



d. Manter íntegra (**não recortar**!) a última página do caderno:



8.7.- Comentários Finais

Os educadores perceberão que os quatro materiais aqui apresentados – as Reguinhas de Itar/Séguin, as Fichas de Trabalho UDCM, o Ábaco UDCM, o Caderno UDCM – são bastante distintos um do outro em termos tanto psicopedagógicos como em termos de possibilidades concretude. O uso integrado e bem coordenado de todos estes materiais, com certeza, acelerará a aprendizagem tornando-a significativa. A idéia da utilização de diversos materiais concretos com uma mesma finalidade (composição e decomposição de numerais em termos de unidade, dezena, centena e milhar) não é uma idéia recente, ela é inspirada no brilhante trabalho educacional de Maria Montessori.

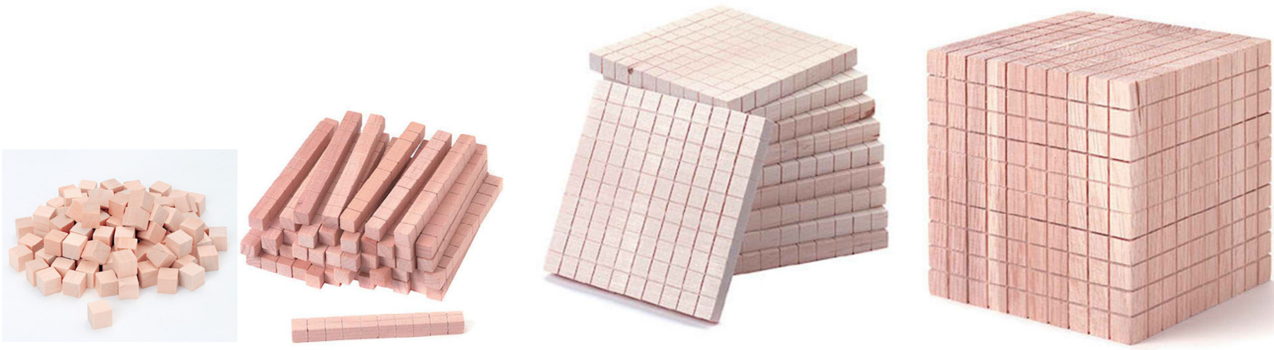
JARIT#09 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 09

Agrupamentos em Dezenas, Centenas e Milhares

À escrita dos numerais (numerais = símbolos arbitrados por uma cultura) deve sempre corresponder grupamentos quantitativos (números = quantidade) que nos permitam através de contagem 'entender' o que sejam as dezenas, centenas e milhares. Denominados no Brasil erroneamente como 'Material Dourado de Montessori' em função dos blocos originais criados por Montessori que eram compostos por contas de vidro douradas, hoje, confeccionados em madeira ou plástico, deveriam ser denominados Blocos Base Dez de Montessori ou Blocos UDCM da Base 10.

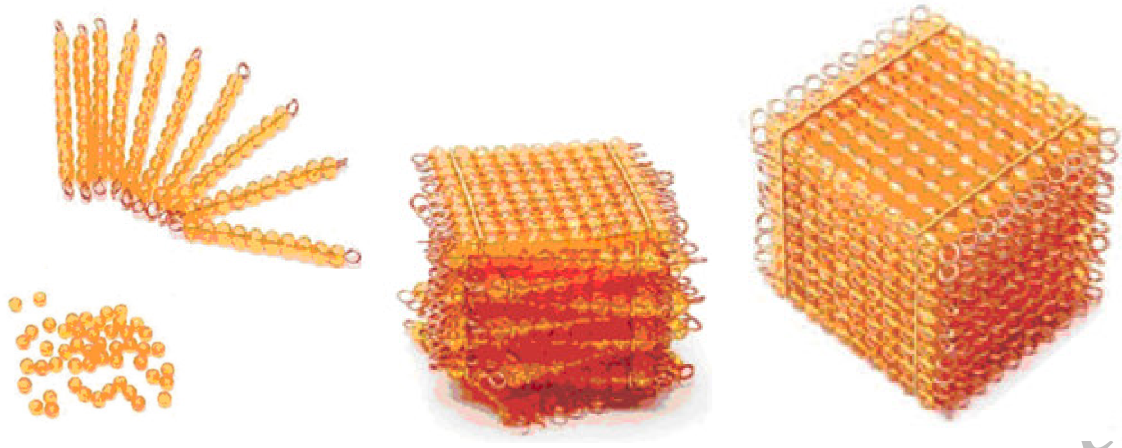
9.1.- O Material Dourado(?) de Maria Montessori

O desenho a seguir mostra o que se convencionou denominar no Brasil: Material Dourado de Montessori. Nos Estados Unidos o nome parece melhor indicar a finalidade do material: *'Base Ten Blocks'* que podemos traduzir como sendo: *Blocos Base Dez.* No entanto, nos parece que o nome *Blocos UDCM da Base Dez.*



9.1.1.- O Porque do Inadequado Nome "Material Dourado"

Este nome advém do seguinte fato: este material quando criado era formado por pequenas contas de vidro com diâmetro igual a 0,5 cm, perfuradas e justaposta, ligadas por fios metálicos (arames especiais inoxidáveis). Hoje elas são produzidas em nylon e, para manter a tradição, elas podem ainda estar ligadas por fios de arame, mas podem, por uma questão de redução no preço, estarem coladas umas às outras com colas especiais, formando as dezenas, centenas e milhares, sendo que no caso das unidades, as contas não se apresentam perfuradas.



9.1.2.- A Aquisição é Fácil, Mas Temos que Pagar o Alto Preço

Praticamente, todos os materiais concretos psicopedagógicos criados por Maria Montessori podem ser adquiridos hoje em dia numa das inúmeras lojas virtuais que encontramos na Internet[11]. São lojas virtuais localizadas principalmente nos Estados Unidos, mas podem estar sediadas no Canadá, e até mesmo na China e ou na Rússia, podendo ser acessadas na sua língua de origem ou em inglês, ou até em francês como no caso do Canadá que é um país bilíngüe (inglês/francês).

Quando falamos do Material Dourado de Montessori a maioria dos educadores não pensam naquele material psicoaritmético que era feito com contas de vidro e que hoje é feito com contas de nylon, representando as unidades, as dezenas, as centenas e o milhar, sendo que a maioria de nós conhece este material em blocos de madeira, ou mais modernamente, de plástico.

Os conjuntos fabricados com contas de nylon, custa hoje, por volta de US$ 300,00, enquanto o mesmo material fabricado em madeira ou plástico teria o preço reduzido, mas mesmo assim seria um investimento pesado, quando se pensa em salas de aulas com 40 alunos: 400 placas correspondentes às dezenas (10 placas para cada aluno para perfazer o milhar) custariam por volta de US$ 900,00 e 20 cubos correspondentes aos milhares não sairia por menos que US$ 300,00, sem incluir aí, pelo menos 10 barrinhas correspondentes às dezenas e mais 40 pequenos cubos correspondentes às unidades.

9.2.- Trabalhando com o Material Dourado: Limitantes

Ao analisarmos a utilização do Material Dourado (unidades, dezenas, centenas e milhares), por exemplo, numa sala de aulas com 40 alunos nós encontraremos muitos limitantes, alguns possivelmente intransponíveis:

---

[11] Consultar o site: http://www.earlychildhoodlinks.com/montessorians/equipment.htm onde se poderá encontrar links para diversas lojas virtuais.

- Os materiais criados por Montessori se destinam ao trabalho escolar de grupo de duas ou mais crianças;
- O custo total do material – necessário durante as aulas para 10 grupos com 4 alunos cada – é proibitivo dependendo do tipo de escola e do país onde se pretenda fazer isto;
- Como foi dito nos Prolegômenos o Material Dourado deve ser secundado por outros materiais que lhe dão um sentido mais amplo (vide item 0.4.7.- Os Materiais Associáveis ao Material Dourado).

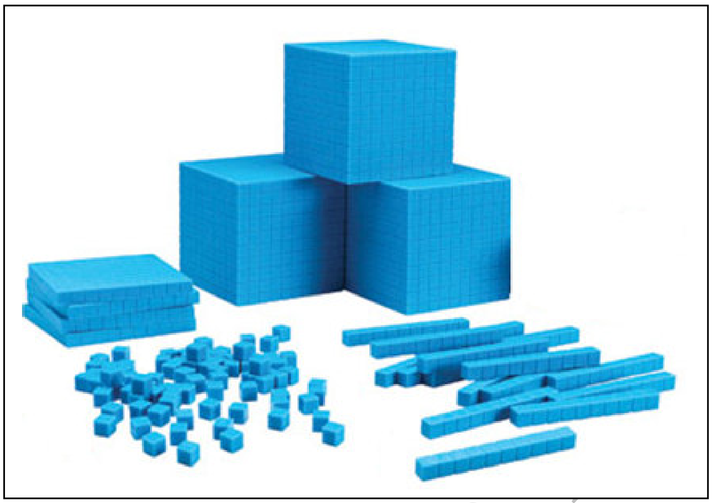
9.2.1.- Uma Alternativa: o Uso de Simbolização

Uma solução para os problemas apontados acima, está em se trabalhar com alguns tipos de *simbolização* deste material. A simbolização é um processo em que se procura expressar o raciocínio por meio de um sistema simbólico.

Entendemos aqui que um símbolo, é aquilo que, seja por um princípio de analogia, seja por sua forma ou sua natureza, evoca, representa, ou substitui num determinado contexto, objetos materiais. No nosso caso específico serão elementos gráficos que representarão de forma convencional elementos concretos, importantes e necessários para a aprendizagem da aritmética numérica ou à realização de operações aritméticas.

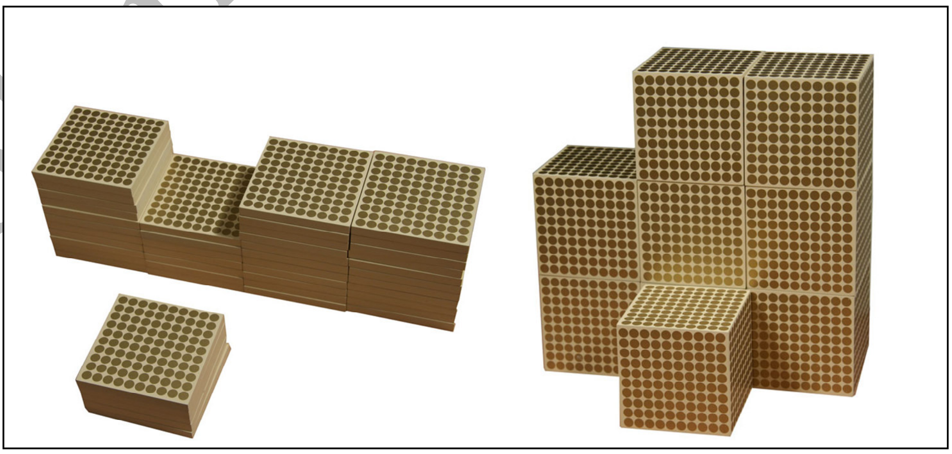
O a escolha do material simbólico tem cuidados especiais que devem ser tomados, para que se consiga que as crianças consigam realizar uma transferência do concreto para o abstrato (os símbolos) de forma absolutamente correta:

1. As alternativas simbólicas ao uso do Material Dourado de Montessori apresentadas a seguir, ***não dispensa o professor de ter pelo menos um conjunto com unidades, dezenas, centenas e pelo menos um bloco de milhar, sejam eles de madeira ou de plástico***, para ser examinado pelos alunos sempre que necessário, e ser comparada ao material simbólico. Para isto, o professor deve ter em mãos em todas as aulas em que o material simbólico for utilizado, pelo menos um conjunto UDCM de Blocos Base 10 e apresenta-lo para que as crianças o examinem em detalhes. No caso específico do Material Dourado, seja ele fabricado com madeira ou plástico, as unidades medem 1cm × 1cm × 1cm, assim, a placa medirá 10 cm × 10cm × 1cm e o cubo medirá 10cm × 10cm × 10cm;

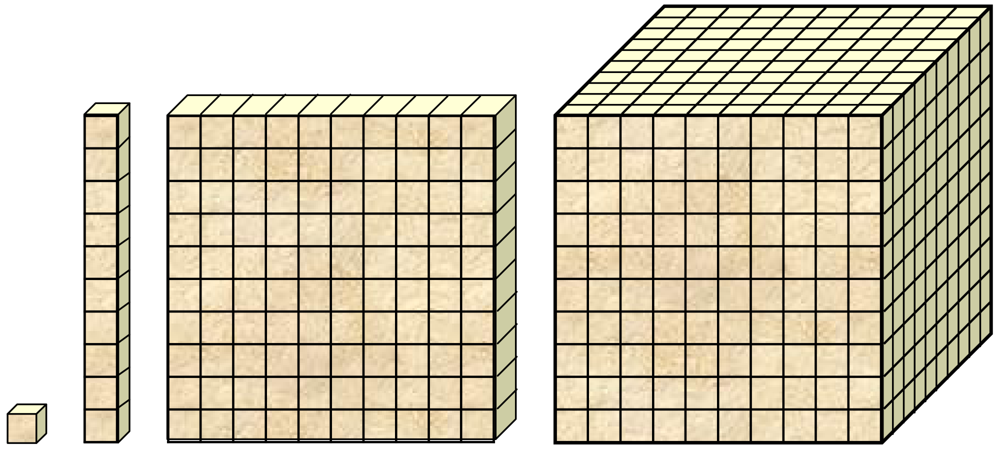


Observar que, O melhor destes conjuntos de blocos é o de madeira, pois enquanto o bloco de madeira (o cubo) correspondente ao milhar é sólido, o bloco do milhar em plástico, geralmente é oco, o que dificulta a compreensão por parte das crianças, de que naquele cubo estão 10 placas de centenas, 100 barrinhas de dezena e 1000 cubos unitários, pois elas alegam que aquele cubo está vazio...

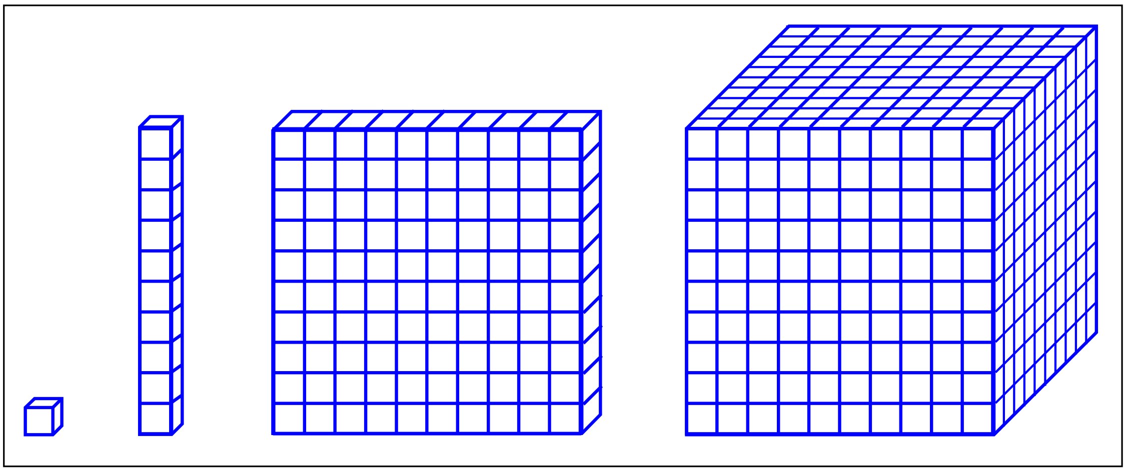
2. Quando falamos de simbolização, iremos apontar um outro conjunto de Blocos da Base 10 que é péssimo em termos de simbolização. Tentando representar o Material Dourado original que era feito com contas de vidro. As contas de vidro são representadas por desenho de pequenos círculos marrons. Mesmo tentando simbolizar o Material Dourado elaborado com as contas de vidro, o conjunto de placas e cubos apresentados a seguir é péssimo, além de apresentar os cubos ocos.



3. Uma destas etapas de simbolização é a da apresentação aos educandos, sejam em folhas de exercícios, sejam em cartazes ou no PowerPoint, desenhos bastante realistas como os mostrados abaixo que permitam a contagem das unidades em cada um deles, se necessário:

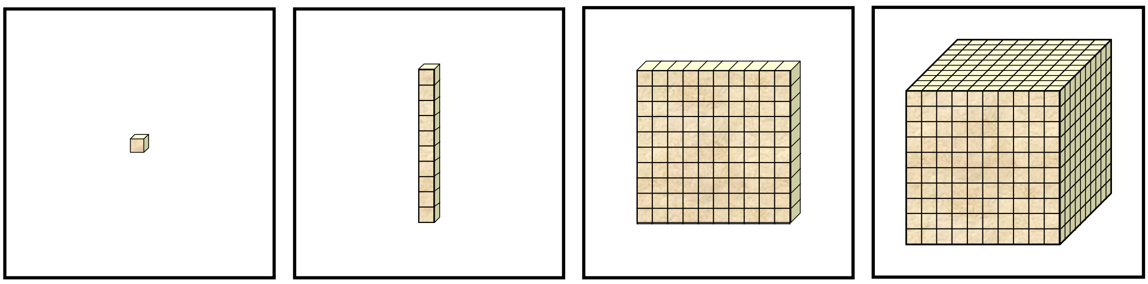


4. Carimbos que poderão ser encomendados numa loja especializada em fabricá-los segundo os modelos encontráveis no CD-R que acompanha este livro. Os carimbos podem ser comparados pela Internet nos sites especializados a preços bem pequenos.

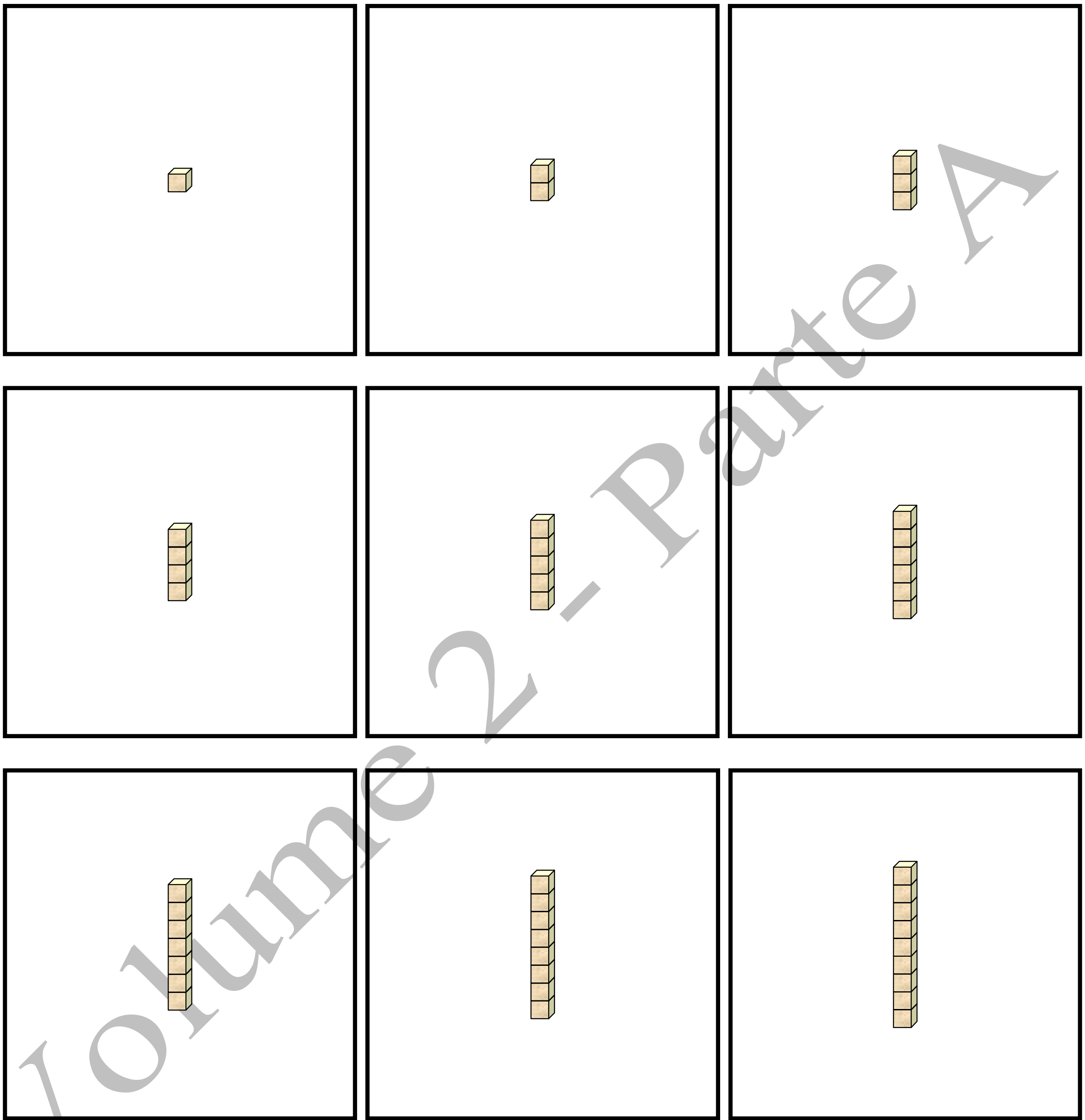


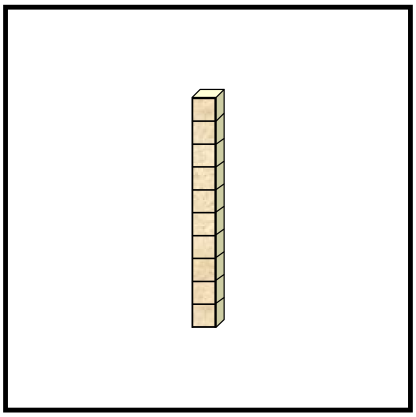
Observar que, no caso das figuras dos carimbos – que são alternativas de baixíssimo custo para 'simbolizar o material concreto' – a verdadeira grandeza se perde –, as figuras são meras representações da unidade, da dezena, da centena e do milhar, em tamanhos reduzidos.

5. O conjunto de cartões denominados '*Cartões UDCM da Base 10'* que apresentaremos a seguir;

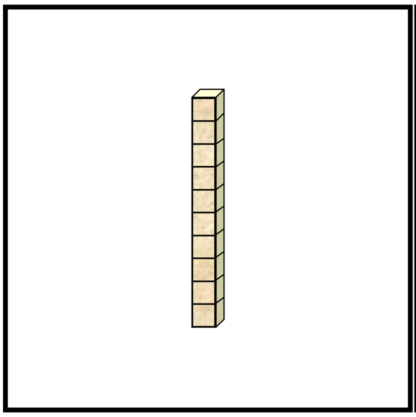
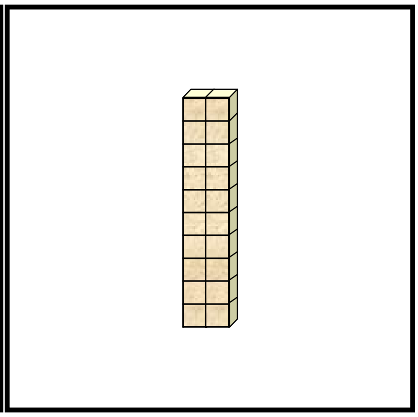
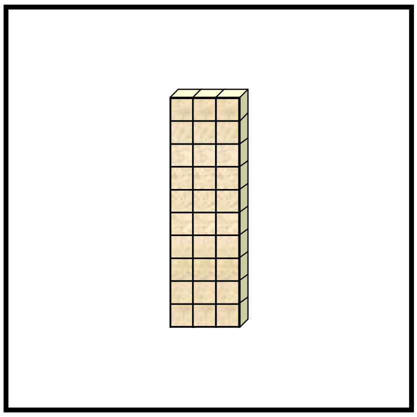


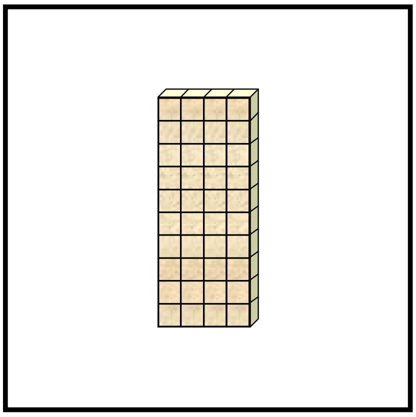
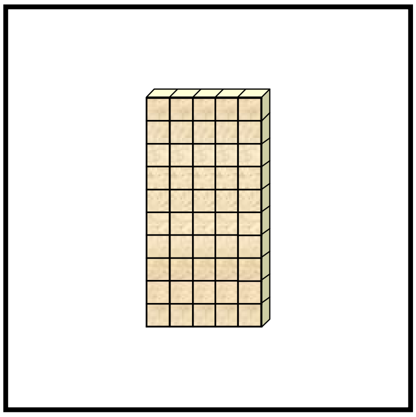
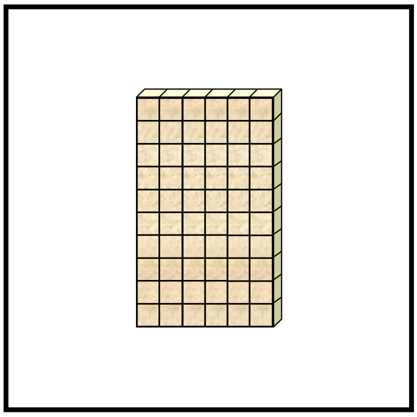
- Do conjunto de cartões de Contagem de 1 até 10; de 10 em 10 até 100; de 100 em 100 até 1000 simulando o Material Dourado.
- ***Contagem de 1 até 10:***

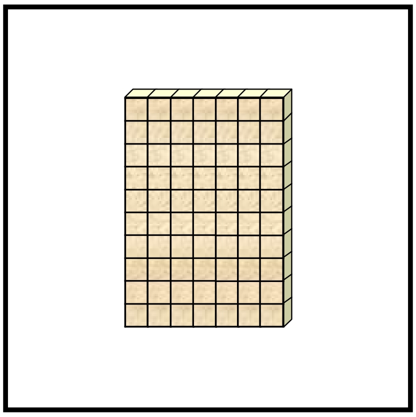
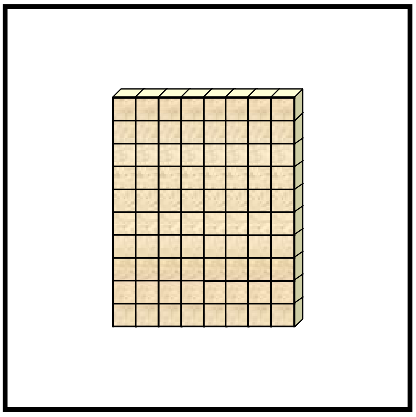
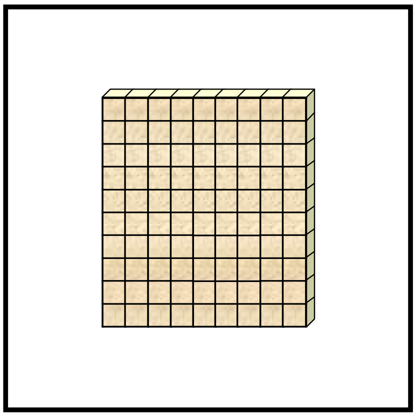


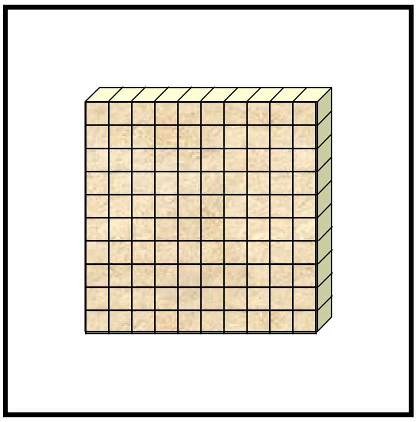


- ***Contagem de 10 até 100 de 10 em 10:***

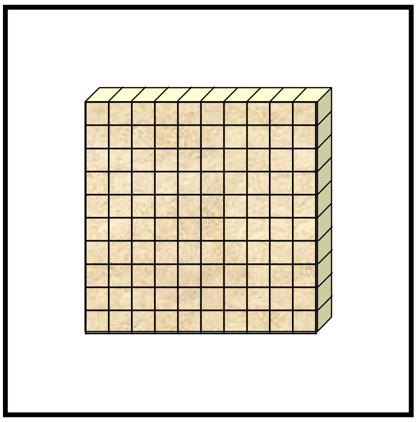




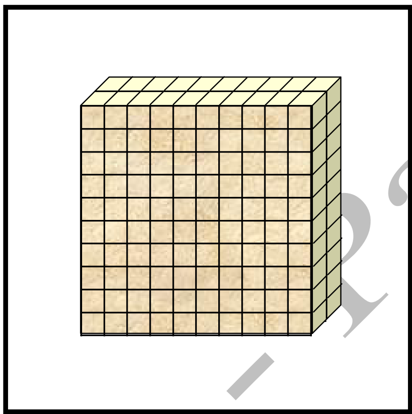




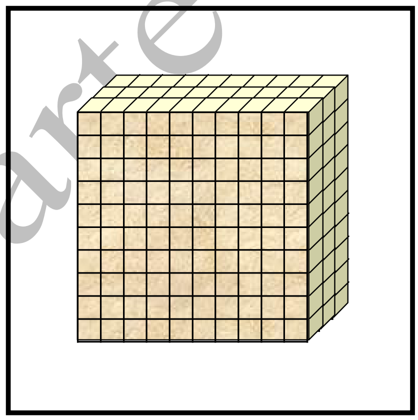




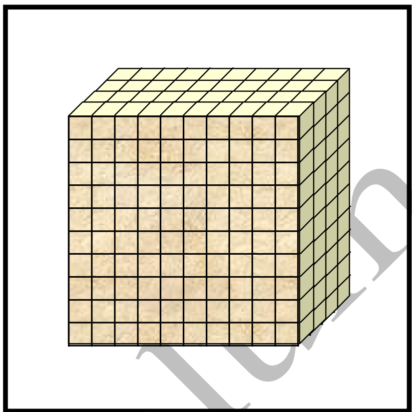


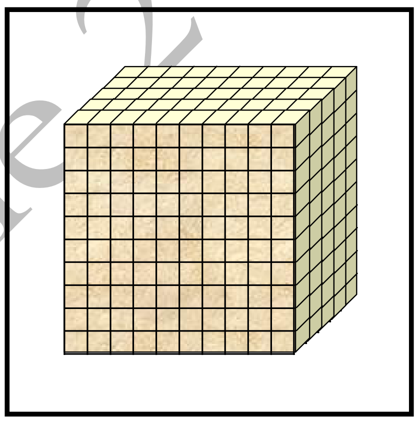
- ***Contagem de 100 até 1000 de 100 em 100:***

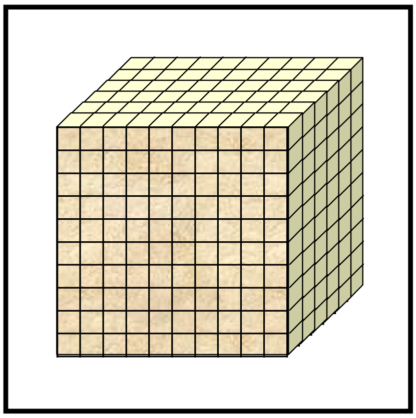


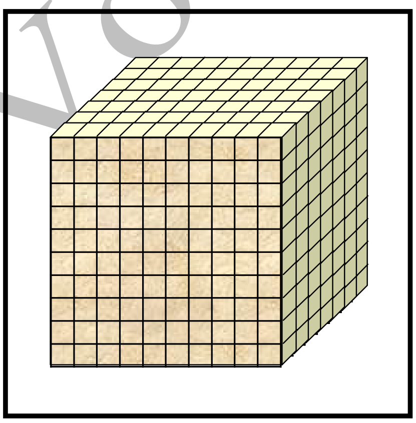


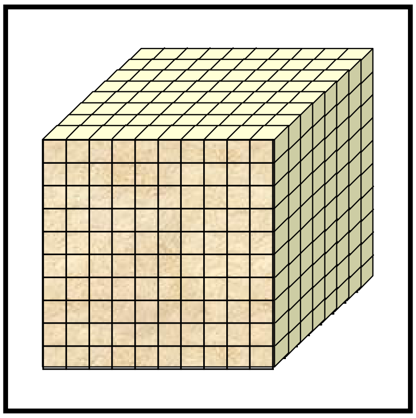


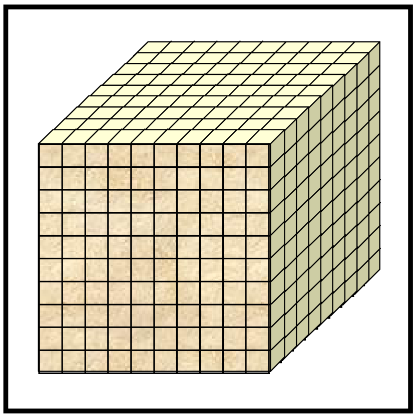


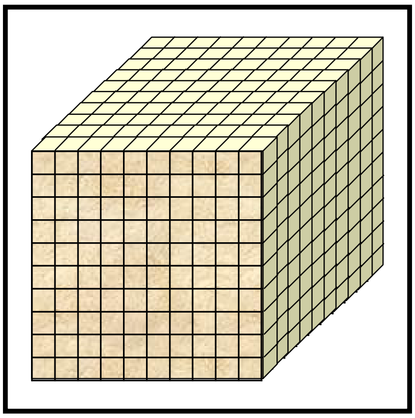












9.3.- Os Usos do Material Dourado

São muitas as formas de utilização do Material Dourado/Blocos Base 10 na Educação Matemática: contagem e correspondência biunívoca os blocos e os numerais hindu-arábicos em termos de unidades, dezenas, centenas e milhares; simulação/concretização de adições e subtrações (vide JARIT#14); simulação/concretização de propriedades e operações com frações.

Todas as formas de utilização do Material Dourado/Blocos Base 10 podem ser encontradas na Internet através de pesquisas no Google (www.google.com.br).

JARIT#10 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO #10

JOGO DA MEMÓRIA – COMPLEMENTO DE 10, DE 100 e 1000

O Jogo da Memória Complemento de Uma Idéia foi apresentado pela primeira vez no livro '40 Jogos Para o Pensamento Lógico' (JLOGC#08). Neste jogo os de cartões não serão buscados pela identidade, sendo que os pares de cartões deverão ser formados pela complementaridade das seguintes idéias:complemento de 10, de 100 e outros.

10.1.- Sobre as peças do Jogo

O Jogo da Memória – Complemento de 10 possui 13 cartões quadrados (medidndo aproximadamente 5cm × 5cm) numerados de 0 até 10 e mais um cartão numerado com o numeral 5 (que figura no final da sequência numérica), como mostrado abaixo. Note que as cartas, com o numeral 5, são os únicos cartões idênticos.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	5

Já o Jogo da Memória – Complemento de 100 possui 13 cartas numeradas de 0 até 100, variando de 10 em 10 unidades. As cartas são: 0, 10, 20, ... , 90, 100, sendo que o cartão com o número 50 tem uma duplicata.

0	10	20	30
40	50	60	70
80	90	100	50

O verso de todos estes cartões deve apresentar-se com um mesmo padrão neutro, como ocorre nas cartas do baralho comum, ou devem ser deixados em branco.

10.1.1.- Regras do Jogo Complemento de 10

Este é um jogo da memória em que o par de cartões não se faz pela identidade entre os valores, mas sim pela soma (resultado das adições) dos valores numéricos constantes nas cartas. A soma dos valores deve ser sempre 10.

1. Embaralhar as cartas, cujos valores numéricos devem estar voltadas para baixo, sobre o tampo de uma mesa.
2. O jogo começa ao se virar duas destas cartas e verificar se a soma de seus valores numéricos resulta 10. Caso isto aconteça deve-se retirar estas duas cartas do jogo.
3. Caso a soma não seja 10, deve-se desvirar as cartas e tentar novamente com outras cartas, e assim por diante até que todos os pares de cartas sejam encontrados.

10.1.2.- Outras idéias

Este jogo pode ser ampliado para se jogar o 'Complemento de 12', com os cartões de 0 até 12 e mais uma contendo o número 6. Para a obtenção deste cartão suplementar deve-se imprimir todo o conjunto de cartões duas vezes.

Pode-se ainda pensar em outros jogos semelhantes em que, envolvendo números ímpares como no caso do 'Complemento de 11', não haverá a necessidade de existir a carta dupla (duas cartas idênticas), e as cartas deverão ser numeradas de 0 a 11.

Algumas cartas a seguir permitirão criar novas possibilidades de jogar outros complementos de X = 11, 12, 13, etc, até X= 34 (ou seja: 17 + 17). Pense sobre todas estas possibilidades usando o conjunto de cartões a seguir, que deverão ser impressos duas vezes.

6	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**
14	**15**	**16**	**17**

10.2.- Regras do Jogo Complemento de 100 e mais

As mesmas regras acima podem ser adotadas para o jogo 'Complemento de 100' e também para se jogar o complemento de 120, 130, 140, ..., até o complemento de 340 (ou seja: 170 + 170), utilizando-se a série de cartões de 0 até 100 e o seguinte conjunto de cartões, a ser impresso duas vezes quando o complemento a ser conseguido se refira a um número par.

60	70	80	90
100	110	120	130
140	150	160	170

10.3.- Regras do Jogo Complemento de 1000 e mais

Abaixo estão os cartões para o jogo do complemento de 1000 até o complemento de 3400, a serem jogados de acordo com as regras anteriormente estabelecidas.

0	100	200	300
400	500	600	700
800	900	1000	500

600	700	800	900
1000	1100	1200	1300
1400	1500	1600	1700

JARIT#11 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 11
AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS

Segundo o Grande Dicionário Saconi eletrônico: "aritmética é a parte da matemática que trata das operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e extração de raízes" devendo-se acrescentar aí que: estas operações são estudadas levando-se em conta os Números Reais, podendo ser estendidas aos Números Complexos. Uma melhor conceituação é encontrada no American Heritage Dictionary: "arithmetic: the mathematics of integers, rational numbers, real numbers, or complex numbers under addition, subtraction, multiplication, and division" que poderia ser traduzido livremente como: "A matemática dos números inteiros, racionais, reais ou complexos, em operações envolvendo adições, subtrações, multiplicações e/ou divisões".

11.1.- As Operações Aritméticas e Suas Operações Inversas

Normalmente, quando nos referimos às operações aritméticas fundamentais deveríamos citar a adição e a multiplicação, enquanto as operações subtração e divisão deveriam ser denominadas operações inversas respectivamente da adição e da multiplicação. No entanto é usual considerar que estas são 'as quatro são operações aritméticas fundamentais'.

Numa primeira abordagem didático-pedagógica estas 'quatro operações' envolvem apenas os números naturais, a saber: 0, 1, 2, 3, 4, etc. Mais adiante, no processo de aprendizagem da matemática, são introduzidos os conceitos muito mais complexos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números fracionários e decimais. Muito mais tarde, passa-se a estudar essas quatro operações envolvendo os números inteiros: 0, ±1, ±2, ±3, ±4, etc, e os números denominados algébrico, aqueles que podem ser precedidos dos sinais '+' ou '–'.

Por outro lado, outras operações aritméticas – mas todas elas calcadas naquilo que se aprendeu sobre as quatro operações aritméticas fundamentais – vão sendo introduzidas no processo de aprendizagem da aritmética, sempre que isto se faça oportuno e/ou necessário. Estas outras são a potenciação e a sua operação inversa, a radiciação; a média aritmética simples e a média aritmética ponderada, ou ainda, a média geométrica; a fatoração – decomposição de números em fatores primos, o cálculo do MDC (máximo divisor comum) e o cálculo do MMC (mínimo múltiplo comum), entre outras.

Aqui, neste JARIT#01, iremos estudar apenas as quatro operações aritméticas fundamentais.

11.2.- Concretizando as Operações Aritméticas Fundamentais

As 'quatro operações aritméticas fundamentais': adição, subtração, multiplicação e divisão podem ser efetuadas por crianças pequenas – mesmo quando fora do contexto escolar – a partir de que dominem a contagem do 1 até 10 ou até 20. Normalmente, estes cálculos são propostos verbalmente, como em:

- "Quanto vale cinco mais dois?";
- "Se eu tenho oito balas e chupo três balas, quantas ficam?";
- "Se cada caixinha contém dois chicletes, quantos chicletes eu terei, se comprar três caixinhas?";
- "Nesta lata existem doze bolachas, devo distribuí-las para 3 crianças, quantas bolachas vai receber cada criança?".
- "Num pacote existem 15 balas, devo distribuí-las para 4 crianças. Quantas balas vão receber cada uma das crianças? Quantas balas ainda sobrarão?".

Problemas como estes podem ser concretizados utilizando-se palitos de fósforo, botões, tampinhas de refrigerante, contas ou fichas de plástico, porém, um passo adiante, é a utilização de papel e lápis para representar problemas como aqueles.

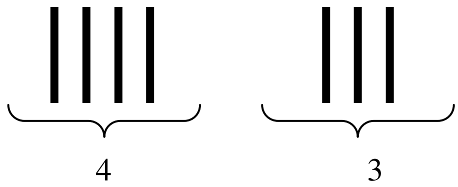
As quantidades devem ser representadas por pequenos traços desenhado na folha de papel como será mostrado a seguir. Estes traços podem ser denominados "pauzinhos" – numa analogia aos palitos de fósforo.

11.3.- Contando nos Dedos ou Operando com 'pauzinhos'?

Os educadores experientes sabem que a contagem nos dedos, ao contrário da contagem com materiais concretos tais como palitos, pedras, tampinhas e contas, dificilmente pode ser estendido eficientemente às operações de multiplicação e divisão. Não é prático levar-se nos bolsos palitos de fósforo, tampinhas de refrigerante, pedrinhas ou um ábaco de contas coloridas para poder concretizar as quatro operações. Assim achamos bastante útil a introdução de um método de contagem e concretização das quatro operações que é o riscar e contar. Alguns educadores chamam estes risquinhos sobre o papel de "pauzinhos".

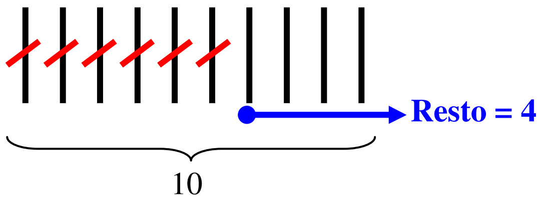
Pode-se então abandonar a contagem nos dedos e passar-se a uma fase mais ampla que é a contagem de "pauzinhos" ou cruzamentos, como iremos ver a seguir.

$4 + 3 =$



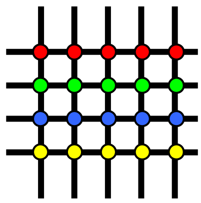
Quatro traços mais três traços, quando contados de forma agrupada, resultam “sete”.

$10 - 6 =$



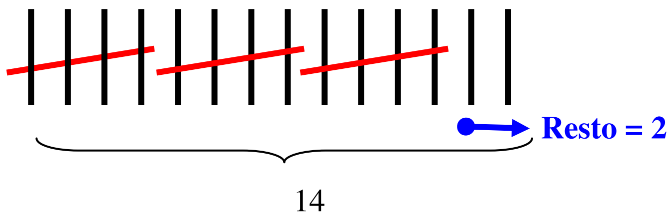
Dez traços dos quais se “cortam” seis, fazem restar quatro não “cortados”.

$4 \times 5 =$



Quatro traços horizontais longos, cruzados por 5 traços longos verticais, produzem 20 cruzamentos (pequenos círculos coloridos), que é o produto procurado.

$14 \div 4 =$



São 14 segmentos agrupados 4 a 4 formando 3 grupos (quociente = 3) sendo que restam 2 segmentos não agrupáveis (resto da divisão de 14 por 4 = 2)

Um passo importante, para a aprendizagem da aritmética realizada pela criança é aquele em que ela consiga realizar as operações utilizando-se apenas de imagens mentais. O bom educador deve estimular este tipo de ação através de exemplificação e diálogos com a criança.

11.4.- Sobre a Nomenclatura dos Operandos Aritméticos

Um estudo muito importante diz respeito à nomenclatura dos elementos envolvidos nas operações aritméticas, pois estes elementos geralmente são exigidos em resolução de problemas aritméticos, tais como:

- "Numa adição com duas parcelas, uma delas é o dobro da outra, se a soma vale 9, quais são estas parcelas?";
- "As três parcelas de uma adição são números naturais sucessivos e a soma deles vale doze. Quais são estas três parcelas?";
- "Numa subtração o minuendo vale quinze e a diferença vale seis, qual é o subtraendo?";
- "Numa multiplicação com dois fatores, um dos fatores supera o outro em 3 unidades, e o produto vale quinze. Quais são estes fatores"?;
- Numa multiplicação envolvendo três fatores, todos eles são números inteiros ímpares positivos, um deles vale 3 e o produto vale 15. Quais são estes fatores?
- Se o quociente e o resto de uma divisão valem respectivamente cinco e três, qual será o dividendo, se o divisor vale quatro?".

Estes são problemas importantes, não somente por envolverem a nomenclatura formal dos operandos da adição, subtração, multiplicação e divisão, que permitirão no futuro, a aprendizagem de várias propriedades matemáticas relevantes. Assim, é bom que as crianças que aprenderam as quatro operações, aprendam também – quando no contexto escolar – esta nomenclatura, bem como passem a utilizá-la de forma correta.

11.5.- Jogos Para o Pensamento Aritmético

Os problemas aritméticos (ou situações-problema) formulados verbalmente pelos pais ou pelos professores deveriam sempre ser concretizados pelas crianças, utilizando-se como já foi mencionado anteriormente: palitos de fósforo, botões, tampinhas de refrigerante, contas ou fichas de plástico, porém, um passo adiante, seria a utilização de papel e lápis onde se traçariam os 'pauzinhos', e ainda mais adiante dever-se-ia propor a associação destes 'pauzinhos' aos numerais.

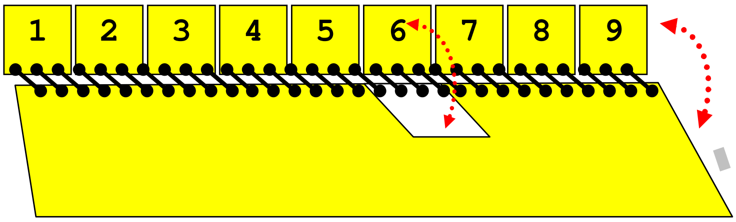
JARIT#12 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 12

SOMA 45, 81 ou 90 A PARTIR DO LANÇAMENTO DE DADOS

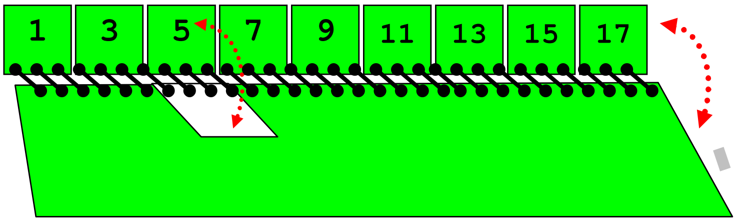
Estes são jogos que envolvem estratégia e sorte, sendo que as escolhas destas estratégias devem ser feitas a cada lançamento de um dado hexagonal (e em alguns casos de dois dados heaaxagonais): são adições que devem ser testadas e realizadas através ponderações e raciocínios bastante intrincados.

12.1.- Os Jogos da Soma

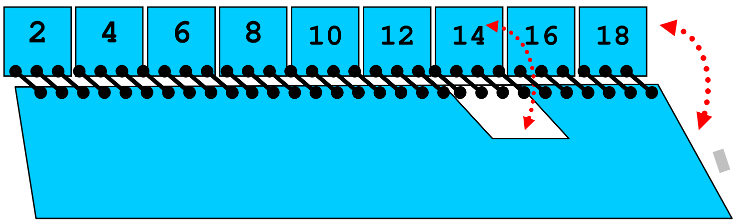
O jogo que serão apresentados a seguir consistem de um conjunto de cartões com valores numéricos que devem ser somados a partir de valores obtidos nio lançamento de um ou dois dados heaxagonais, cuja soma das faces obtidas nos diversos lançamentos deve atingir no máximo 45, 81 ou 90 pontos de acordo, respectivamente, com o tabuleiro escolhido entre os seguintes apresentados



➔ **Soma : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45**



➔ **Soma : 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 12 + 15 + 17 = 81**



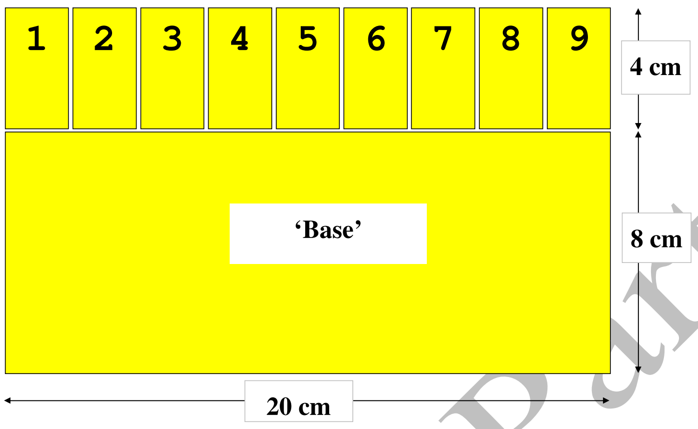
➔ **Soma : 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = 90**

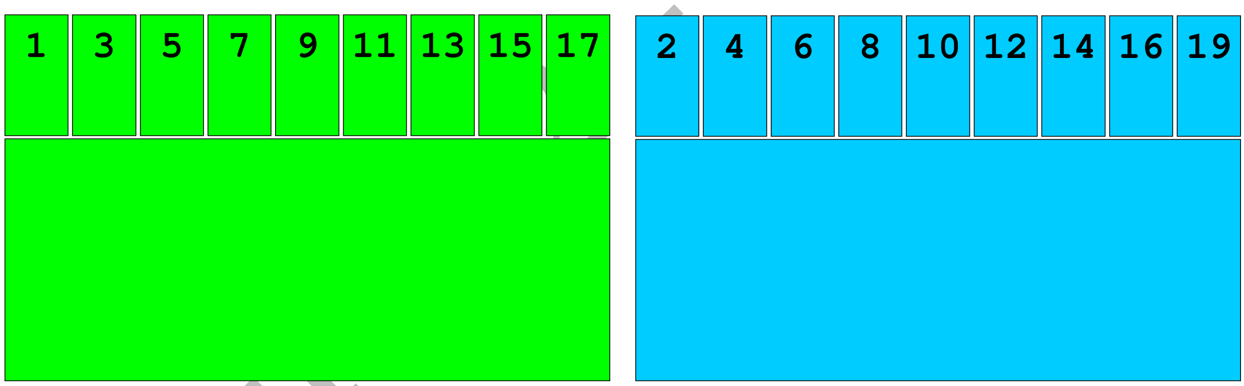
Os lances obtidos nos dados é que justamente permitirão abaixar as abas numéricas, mostrando o seu verso em branco (vide figuras acima).

12.2.- A Confecção dos tabuleiros

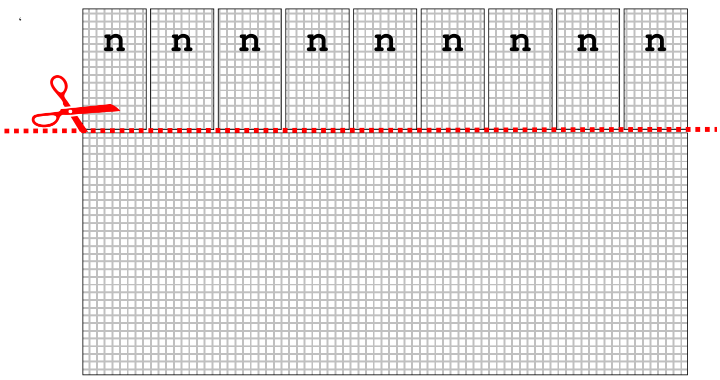
Os tabuleirtoa devem ser confeccionado da forma abaixo descrita que comporta seis etapas que devem, ser seguidas cuidadosamente:

1. Imprimir os seguintes modelos constantes do CD-R que acompanha este livro:

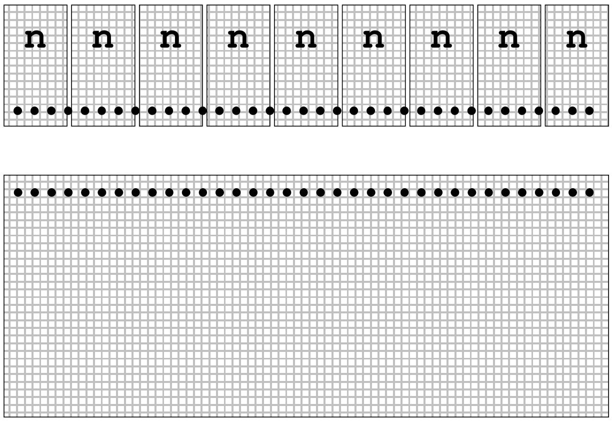




2. Plastificar cada um dos três tabuleiros (base + cartões numéricos) formando um único conjunto.
3. Separar com um corte a base do conjunto de cartões numéricos conforme a indicação a seguir:

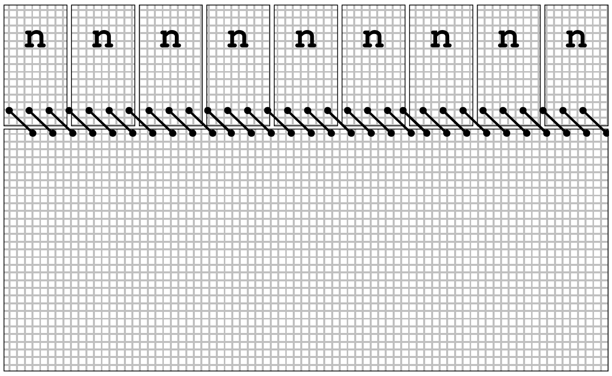


4. Numa loja especializada solicitar que sejam perfurados os dois conjuntos de acordo com o desenno abaixo:

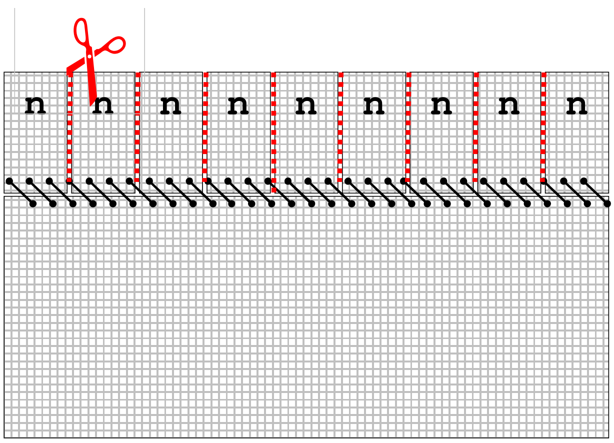


5. Em seguida, solicitar que as peças sejam ligadas por um espiral de plástico, conforme o mosrtrado abaixo:

6.

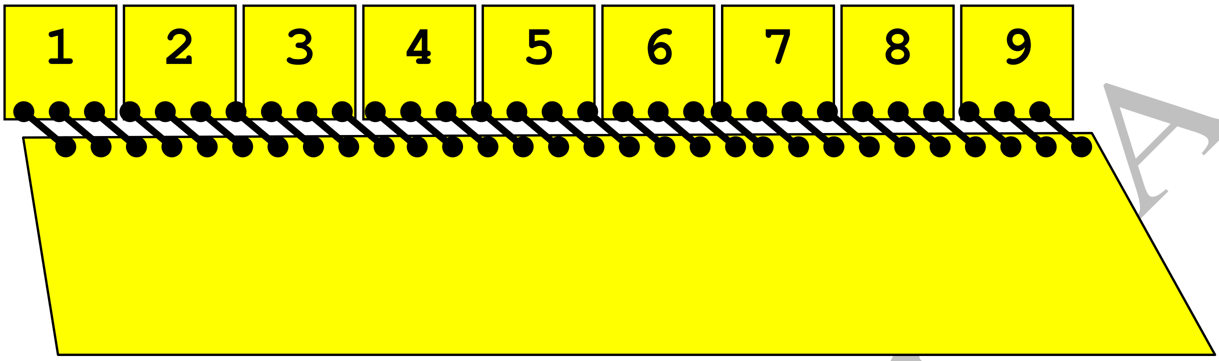


7. Separas os cartões númericos cortando conforme indicados como no desenho abaixo (serão oito cortes):



12.3.- O Jogo da Soma 45

Para se jogar o 'Jogo da Soma 45' deve-se utilizar o tabuleiro amarelo:



12.3.1.- Regras do Jogo da Soma 45

Este é um jogo para um ou dois jogadores, ou seja, um jogo solitário ou em duplas, cujas regras são as seguinte:

1. O jogador deve lançar dois dados hexagonais;
2. Os valores obtido poderão:
   a. Utilizar apenas um dos valores obtidos,
   b. Utilizar a soma dos dois valores;
3. Um dos valores assim obtidos (vide a reagra 2 acima) permitirá ao jogador escolher as abas numéricas (de 1 asté 9) que deverá ou deaverão ser viradas para baixo perfazendo o valor escolhidos conforme a regra 2.
4. Quando o valor do lançamento não puder ser escolhido por ser impossível virar as abas, o jogo termina para aquele jogador.
5. Se houver um segundo jogador, aquele que terminou a partida passa o dado e o tabuleiro para o seu oponenete.
6. Cada jogador deverá ter e preencher a sua planilha estatística:

Nome do Jogador:		
Partida	**Soma total**	**Vitória**
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		
8.		
9.		
10.		

7. O total de pontos feitos até ali devem ser anotador na planilha estatística na primeira coluna, sendo que na segunda coluna (Vitória) deve ser anotado se foram ou não atingidos os 45 pontos: 'sim' ou 'não'.

Observação Importante:

O jogo se torna mais difícil na medida em que jogarmos com apenas um dado hexagonal. Acreditamos que seja esta a regra com que normalmente este jogo é conhecido.

12.4.- A Fórmula para o Cálculo dos Valores das Somas

A adição dos números naturais de 1 até 9, ou seja, ***1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 irá resultar ' 45'.***

O que deavemos notar é que esta sequência numérica tem uma lei de formação, ou seja, a partir do primeiro termo sempre iremos adicionando uma unidade , que no caso será denominada razão. Já no caso das duas seguintes sequências: **'1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 17' e '2, 4, 6, 8, 10, 12,14, 16, 18'** a razão é 2.

Estas três sequências por terem este tipo de lei de formação (a adição de um valor constantes a um termo anterior para a obtenção do termos seguinte) é denominada Progressões Aritméticas

Matematicamente problema da obtenção da soma destes 'n' termos pode ser conseguida através da fórmula da soma da Progressão Aritmética (PA).

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2},$$

onde a_1 é o primeiro termo da sequência numérica, n é a quantidade de termos da sequência, a_n o último termo (n-ésimo termo) da sequência, ou ainda, da PA. Neste caso específico temos: $a_1 = 1$, o último termo $a_9 = 9$, e a quantidade de termos $n = 9$, isto é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\times n}{2} = \frac{(1+9)\times 9}{2} = \frac{10\times 9}{2} = \frac{90}{2} = 45.$$

Vamos agora utilizar a fórmula da soma dos termos de uma PA para calcular: (a) a soma dos 9 primeiros números naturais pares a partir do 2; (b) a soma dos primeiros 9 números naturais ímpares.

(a) $a_1 = 1$, o último termo $a_9 = 17$, e a quantidade de termos $n = 9$

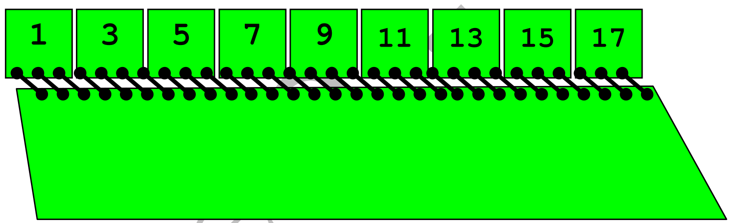
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\times n}{2} = \frac{(1+17)\times 9}{2} = \frac{18\times 9}{2} = \frac{162}{2} = 81.$$

(b) $a_1 = 2$, o último termo $a_9 = 18$, e a quantidade de termos $n = 9$

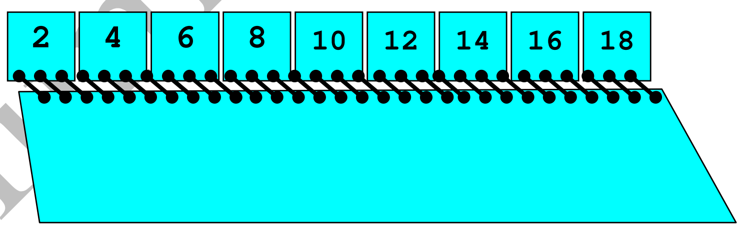
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\times n}{2} = \frac{(2+18)\times 9}{2} = \frac{20\times 9}{2} = \frac{180}{2} = 90.$$

12.5.- O Jogo da Soma 81 e o Jogo da Soma 90

Para se jogar o 'Jogo da Soma 81' deve-se utilizar o tabuleiro verde:



Para se jogar o 'Jogo da Soma 90' deve-se utilizar o tabuleiro azul:



12.5.1.- Regras dos Jogos da 'Soma 81' e da 'Soma 90'

Estes jogos continuam podendo ser jogados por um ou dois jogadores, ou seja, pode ser assumido como sendo um jogo solitário ou um jogo para duplas, cujas regras serão as mesmas do 'Jogo da Soma 45' (vide item 11.3.1. acima), considerando-se apenas os novos valores das somas, respectivamente 81 e 90.

12.5.2- Observação Importante:

Estes dois jogos se tornam mais difíceis na medida em que jogarmos com apenas um dado hexagonal, como sugerido no caso do 'Jogo da Soma 45'.

O jogo naturalmente se tornará mais fácil se adotarmos ao invés de dois dados hexagonais, três deste dados podendo escolher utilizar:

a. Apenas um dos valores obtidos,

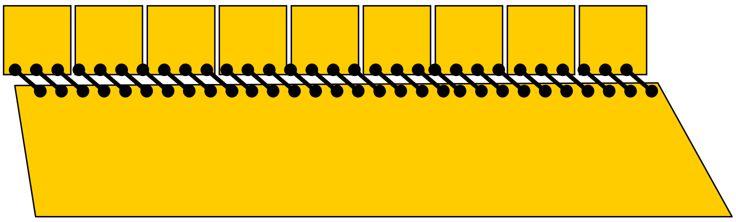
b. A soma de quaisquer dos dois valores;

c. A soma dos três valores.

12.6.- Criando os seus Próprios Jogos

O leitor mais curioso poderá criar os seus próprios jogos escolhendo as sequências numérica que lhe interessar mais. Com esta finalidade um tabualeiro será alocado na CD-R que poderá ser impresso e o leitor colará sobre as abas numéricas os números que escolher.

O novo tabuleiro (numa cor distita das cores anteriores) deve ser impresso e montado conformne as regras do item 11.2. (vide acima).

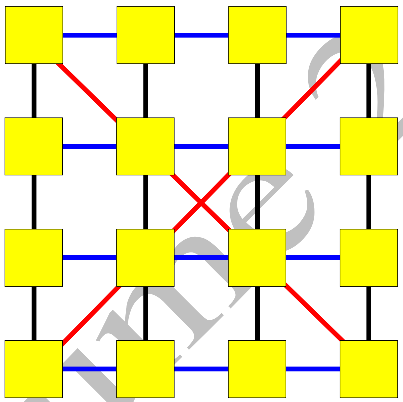


JARIT#13 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 13
SOMA IGUAL A N EM UMA MATRIZ 4 X 4

Gosto muito deste jogo por que ele permite ao leitor experienciar o que seja, genuinamente, um ***Jogo Para o Pensamento Lógico-Matemático*** *dentro do contexto da* ***Aritmética.*** *Como as regras podem ser modificadas de comum acordo pelos jogadores a cada nova partida, tanto o jogo como o 'estudo' das novas regras (suas possibilidades, impossibilidades ou limitações) acabam por se constituir, elas mesmas, num um novo Jogo para o Pensamento Lógico-Matemático, que se torna muitas vezes, até mais interessante que o próprio jogo.*

13.1.- O Jogo da Soma N

O objetivo deste jogo é a obtenção de um valor N, um número inteiro positivo, nulo ou negativo (um número inteiro, isto é, pertencente a $\mathbb{Z}$) como soma, seja nas colunas, diagonais e/ou linhas em um tabuleiro apresentado sob a forma de uma matriz 4×4, utilizando-se, para preenchê-la, cartões numerados de -10 até 10, como a mostrados abaixo



-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
-3	-2	-1	0	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10

13.2.- As Regras Básicas do Jogo

1. Podem jogar duas, três ou quatro pessoas.
2. Joga-se com fichas numeradas, contendo os **numerais inteiros** de -10 até 10. Cada um destes numerais deve ser reproduzido 6 vezes, obtendo-se assim, um total de 126 fichas. Estas fichas devem estar disponíveis sobre a mesa do jogo e poderão ser utilizadas por qualquer um dos jogadores.
3. Os jogadores devem, antes de iniciar o jogo, estabelecer o ***número-meta***: **N**, cujo valor acabará por estar condicionado pelo seguinte: ***a soma de quatro números que devem***

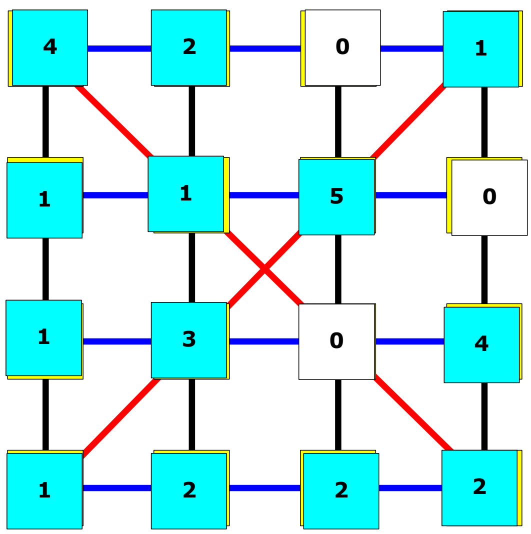
resultar N, terão que ser obtidas pelas fichas numeradas de -10 até 10. É bastante claro que N∈ ℤ, isto é N é um número do Conjunto dos Inteiros ℤ = {0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5,...}.

4. Inicialmente deve-se jogar apenas com as fichas de 0 até 10, evitando-se assim, o uso dos números inteiros negativos. Assim sendo, será razoável escolher-se N como sendo um valor, *por exemplo,* localizado entre 7 e 18. Outros valores fora desta escala até podem e devem ser tentados, mas somente com a finalidade de se verificar os limites possíveis na escolha de N.

5. Escolhido o valor N para a soma, os jogadores devem colocar no tabuleiro, alternadamente uma ficha a cada vez, até que um deles vença, conseguindo completar a soma N seja numa coluna, numa linha ou numa diagonal. Este jogo se torna bastante semelhante ao conhecido Jogo da Velha (em inglês: Tic-Tac-Toe).

6. Note que o limite para a utilização de uma ficha, cotendo um mesmo numeral, estará limitada pela regra [2] acima, pois só existirão 6 fichas com um mesmo numeral. No entanto, a quantidade de fichas numéricas idênticas também poderá ser modificada, para mais ou para menos, de acordo com o que combinarem os jogadores. Se você pretende introduzir uma quantidade maior de fichas, basta imprimir um novo conjuntos das mesmas.

13.2.1.- Um Jogo Solitário: Completar o Tabuleiro

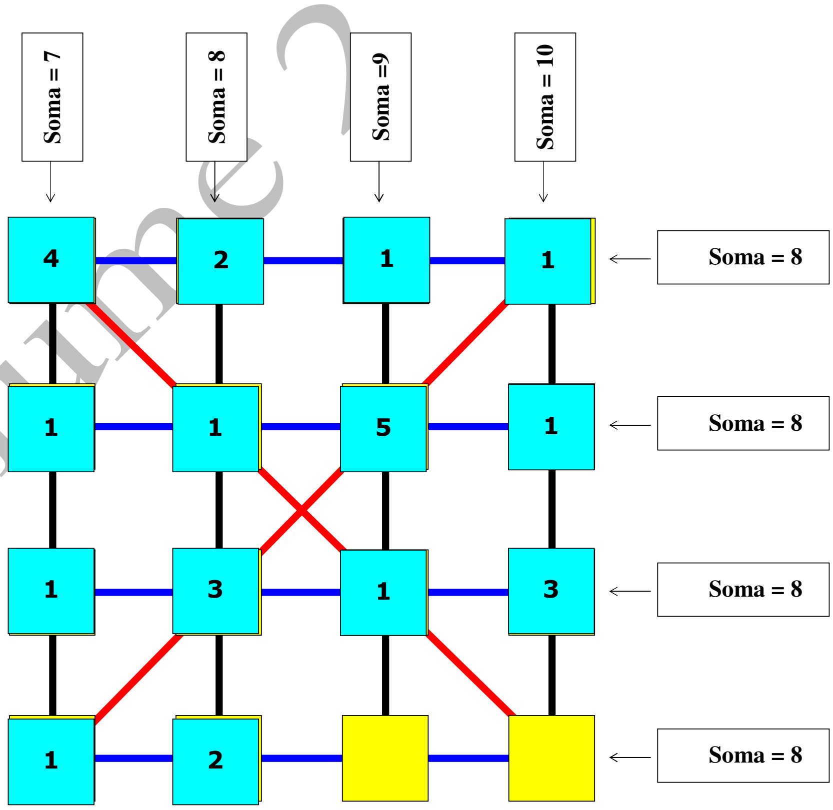


Para estimular os leitores a criarem novas regras para este jogo, nós mostramos, a seguir, num jogo denominado Solitário (jogado apenas por uma pessoa), exemplos de jogadas cujo objetivo seria o de preencher completamente o tabuleiro, com N = 7, utilizando-se apenas os números positivos e o zero. Note que isto quase foi conseguido, a menos de algumas tentativas.

13.2.1.1.- Pensando em Novas regras

Depois de jogarmos o Jogo Solitário, podemos tentar pensar em outras regras, tanto para o Jogo Solitário como para o jogo em que haja dois ou mais participantes, tais como:

- Tentar preencher, num Jogo Solitário, o tabuleiro com duas somas distintas, N_1 ou N_2 indiferentemente da direção: linha, coluna ou diagonal;
- Tentar preencher, num jogo com dois participantes, um que joga, tendo como objetivo conseguir a soma N_1 e o outro que deve conseguir a soma N_2.
- Tentar preencher o tabuleiro com três ou mais somas distintas, N_1, N_2, N_3, N_4 ... etc (valores estes a serem combinados pelos jogadores);
- Tentar preencher o tabuleiro com duas somas N_1 somente nas colunas e N_2 somente nas linhas. Deixando livres as diagonais para a obtenção de qualquer valor da soma.
- Tentar preencher com valores sucessivos, como por exemplo 7, 8, 9 e 10, respectivamente, a primeira, a segunda, a terceira e a quarta as colunas, e com um valor fixo 8 cada uma das linhas (será possível?). Tente outras combinações de números e veja se é possível.



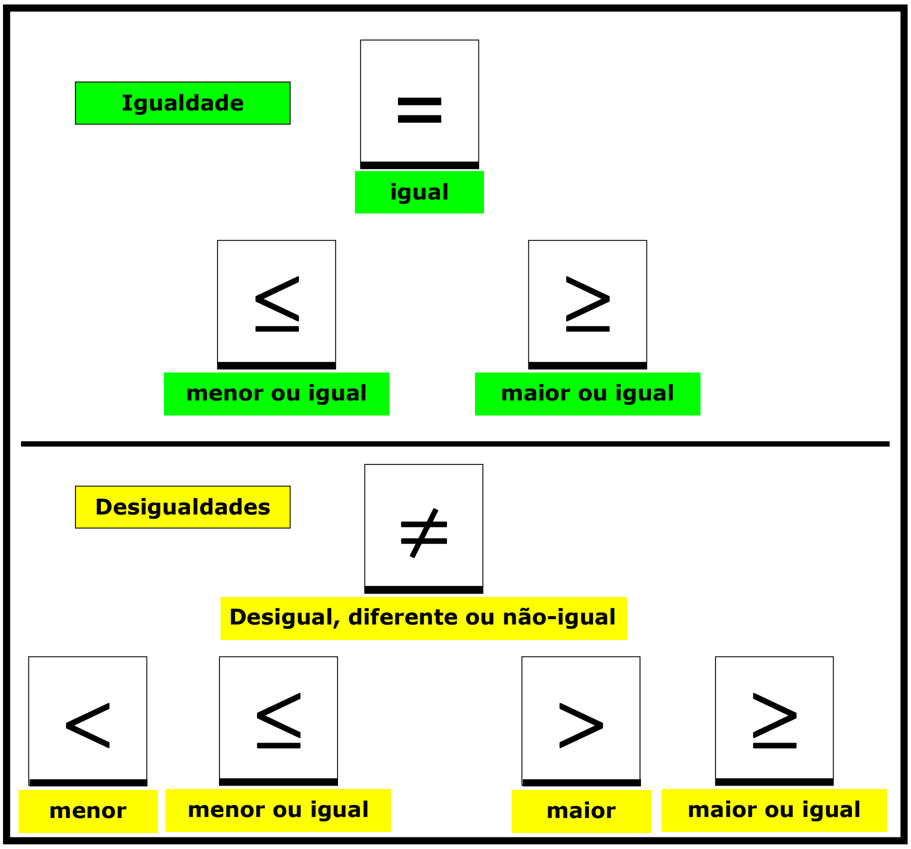
JARIT#14– JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 14

IGUALDADE E DESIGUALDADES ARITMÉTICAS em N

As propriedades das relações de igualdade e das relações de desigualdade são estudadas e diversos jogos utilizando os números naturais N={ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... } são propostos para grupos de até seis jogadores.

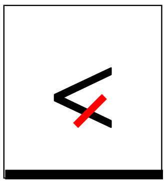
14.1.- O Sinal de Igualdade e os Sinais de Desigualdade

A tabela a seguir mostra um estudo comparativo entre os sinais de igualdade e os sinais de desigualdade. Os sinais '≤' e '≥' podem ser considerados como sinais de igualdade, pois a leitura 'menor ou igual' ou maior ou igual nos permitem escrever: '$5 \leq 5$' e '$5 \geq 5$', pois o 5 satisfaz às duas relações porque: $5 = 5$.

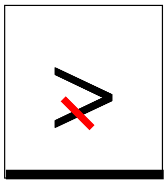


14.1.1. - Identificando os Símbolos 'Maior' e 'Menor'

Um recurso comprovadamente *psicoaritmético* de identificação dos sinais de maior (>) e menor (<) é mostrado a seguir:



menor



maior

Um pequeno ‘corte’ na haste inferior dos sinais ‘<’ ou ‘>’ os ‘transforma’ nos numerais ‘4’ ou ‘7’, o que permitirá identificar o sinal de desigualdade ‘parecido’ com o 4 como sendo um sinal de ‘menor do que’ enquanto o sinal que passa a se ‘parece’ com o 7, como o sinal de ‘maior do que’.

Quando afirmamos acima que este recurso de identificação dos sinais maior (>) e menor (<) pelo corte na haste inferior dos sinais é comprovadamente psicoaritmética, é porque existem duas outras formas de identificação destes sinais usada por muitos professores, que são totalmente confusas:

1. Com as palmas das mãos voltadas para o corpo na altura do tórax a criança deve produzir um ‘v’ utilizando os dedos indicador e médio, recolhendo e prendendo os outros dedos com o polegar: o “v” da mão esquerda indicaria o sinal menor e o ‘v’ da mão direita indicaria o sinal de maior.
2. Com as palmas das mãos voltadas para o corpo a criança deve observar que o ‘v’ formado pelo braço e o antebraço esquerdos corresponde ao sinal de menor e o ‘v’ formado pelo braço e o antebraço direitos corresponde ao sinal de maior.

Estes duas formas de identificação dos sinais de menor e maior dependem de algo externo à aritmética, extrapolam o contexto das folhas do caderno que é onde geralmente se passa este tipo de raciocínio e mais, muitas crianças acabam esquecendo esta relação bastante ‘maluca’ entre a matemática e a posição esquerda/direita das mãos ou dos braços.

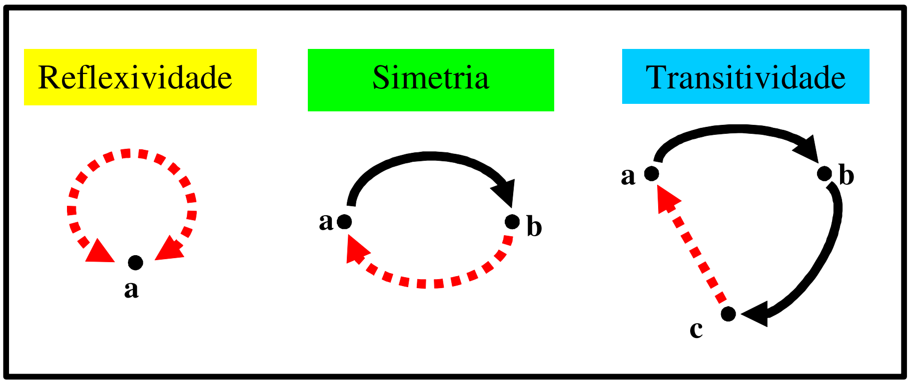
Estes dois tipos de mnemônicos (‘mnemônico’ = ‘fácil de reter na memória’) contrariam exatamente o que diz respeito a esta técnica de memorização, não é fácil resgatar da memória, com fidelidade absoluta, esta relação um tanto estapafúrdia entre partes do corpo e aqueles sinais. Estas duas formas de identificação devem ser descartadas como completamente contrária ao que pensamos como sendo algo psicoaritmético.

14.2.- As Propriedades da Igualdade

A seguir estão listadas as três propriedades da igualdade, onde os símbolos: “∀” deve ser lido como “para qualquer” ou “para todo”, o símbolo “⇔” como “equivale” e o símbolo “⇒” deve ser lido como “se ...então”:

1. **Reflexiva:** $\forall a,\ a = a$
2. **Simétrica:** $\forall a, \forall b,\ a = b \Leftrightarrow b = a$
3. **Transitiva:** $\forall a, \forall b, \forall c, \forall b,\ (a = b \text{ e } b = c) \Rightarrow a = c$

A igualdade é uma relação de equivalência (as relações ‘<’ e ‘>’ não são relações de equivalência). As propriedades das relações de equivalência são mostradas abaixo sob a forma de grafos.



14.2.1.- As Propriedades da Desigualdade:

A desigualdade não é reflexiva nem simétrica, mas é transitiva, isto é:

$$a > b \text{ e } b > c \Rightarrow a > c\text{, e também: } a < b \text{ e } b < c \Rightarrow a < c.$$

- A desigualdade possui ainda, outras propriedades, sendo que uma das mais notáveis é a seguinte: ‘**o sinal da desigualdade se inverte quando ela é multiplicada por qualquer número negativo**’.

1. **Se $a > b$ e $c > 0$ ou $c < 0$, então $a + c > b + c$**
2. **Se $a < b$ e $c < 0$, então: $ac > bc$**
3. **Se $a > b$ e $c < 0$, então: $ac < bc$**
4. **Se $a < b$ e $c > 0$, então: $ac < bc$**
5. **Se $a > b$ e $c > 0$, então: $ac > bc$**

14.2.2.- O Material Para os Jogos das Igualdades e Desigualdades

Os conjuntos de sinais de igualdade e desigualdades nas diversas cores, bem como os numerais, devem ser impressos duas vezes e plastificados.

Podem participar do jogo até seis jogadores. Cada jogador deverá escolher a mesma cor tanto para os sinais como para os numerais. Os conjuntos de numerais de 0 a 10 apresenta o símbolo '✵' que corresponde a um numeral qualquer (é um coringa no jogo).

$=$	$\neq$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

$=$	$\neq$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

$=$	$\neq$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	✵

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	✵

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	✵

$=$	$\neq$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

$=$	$\neq$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

$=$	$\neq$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	✵

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	✵

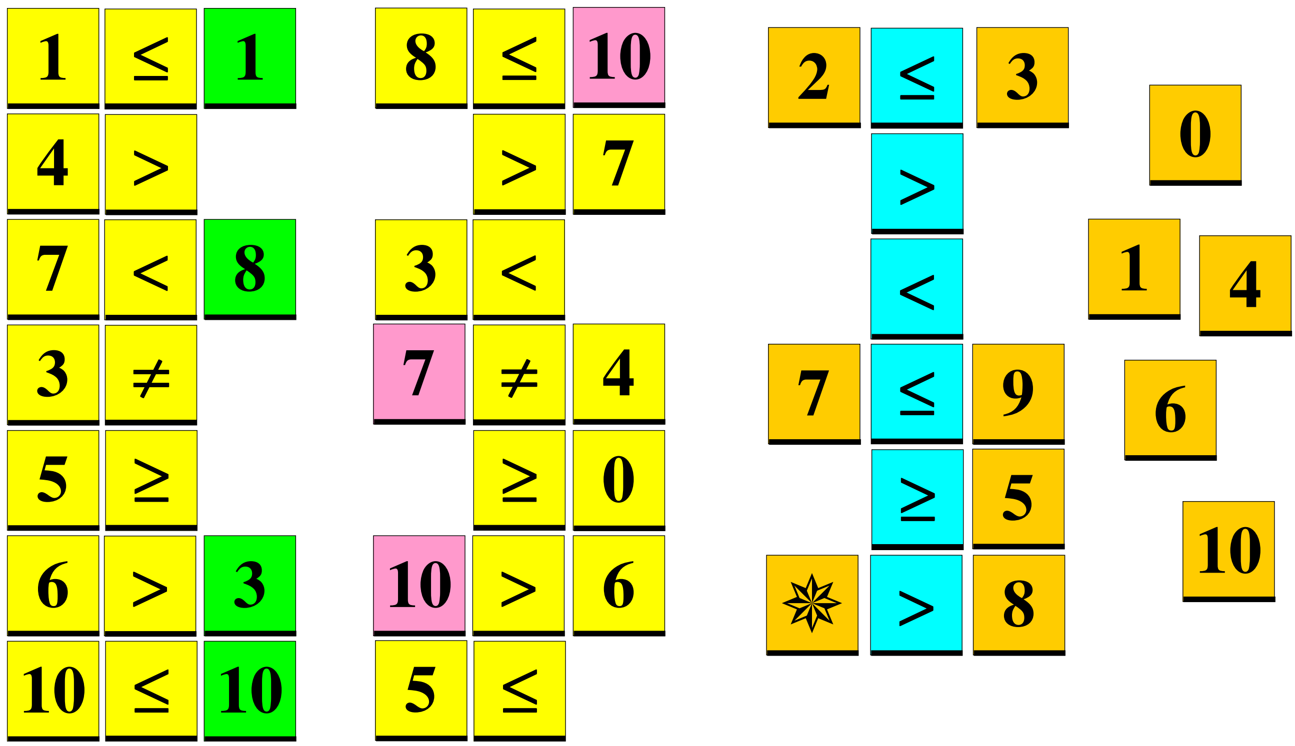
0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	✵

14.3.- Os Jogos

Deve-se lançar um dado, o jogador que obtiver o maior valor no lançamento do dado iniciará o jogo. No caso de mais de dois jogadores, deve-se lançar o dado tantas vezes até que se defina a ordem dos jogadores. Ao invés de se lançar um dado pode-se adotar a modalidade de se tirar usando os dedos o 'par ou ímpar'.

14.3.1.- Jogo do Desafio

Devem jogar três jogadores. O primeiro deles lança o desafio, um problema envolvendo os numerais e os sinais, ou somente os sinais, conforme mostrado a seguir, e o segundo jogador deve resolver o problema. O terceiro jogador confere os resultados. Nos exemplos a seguir, mostramos algumas das soluções dadas pelo segundo jogador, em que ele utiliza os seus próprios cartões, que são de cor distinta da do desafiante.



Acima são mostradas três possibilidades de apresentação dos problemas-desafio:

- Uma em que os numerais aparecem do lado esquerdo dos sinais;
- Outra em que os numerais podem aparecer indiferentemente à esquerda ou à direita dos sinais;

- E a última delas em que apenas os sinais são apresentados. Neste caso, *a coluna com os sinais deve conter apenas seis linhas*, pois o jogador desafiado tem apenas doze cartões numéricos para completar o problema-desafio, e isto, contando com o cartão coringa: '❋', que deverá também ser utilizado, como mostrado.

14.3.2.- Jogo Direto

1. A quantidade de jogadores pode variar de dois a seis.
2. A partida começa pelo estabelecimento da ordem de jogar dos jogadores.
3. O 1º jogador coloca sobre o tampo da mesa um numeral e um sinal;
4. O próximo jogador joga um numeral que torne verdadeira a sentença proposta pelo 1º jogador e acrescenta um novo sinal;
5. Os demais jogadores, quando os há, repetirão a mesma sequência apontada no item acima;
6. Não há possibilidade de jogada para valores menores que zero e maiores que dez, no entanto isto é possível quando se utilizam os sinais: "igual", "diferente" para ambos os casos, e respectivamente para o zero e o dez, os sinais 'menor ou igual' e 'maior ou igual';
7. O jogador impossibilitado de jogar por falta de numerais ou sinais sai do jogo sendo que o último jogador a permanecer, vence aquela partida.

14.3.3.- Jogo com um dado hexagonal

1. A quantidade de jogadores pode variar de dois a seis.
2. O 1º jogador coloca apenas um numeral sobre o tampo da mesa;
3. O jogador seguinte lança um dado e *de acordo com a tabela a seguir* coloca um sinal e, em seguida, um numeral que torne a sentença verdadeira.

Valor:	1	2	3	4	5	6
Sinal:	=	≠	<	≤	>	≥

14.3.4.- Jogo com dois dados hexagonais

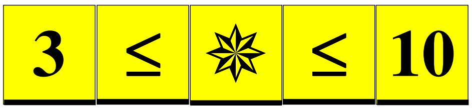
1. A quantidade de jogadores pode variar de dois a seis.

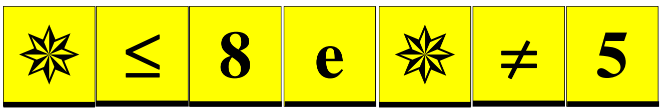
2. O 1º jogador coloca apenas um numeral sobre o tampo da mesa;
3. O jogador seguinte lança dois dados hexagonais, escolhe apenas um dos valores obtidos naquele lançamento, e *de acordo com a tabela a seguir*, e em seguida, coloca um sinal e um numeral que torne a sentença verdadeira.
4. ***Sugestão:*** o Jogo se torna mais fácil quando se lançam três dados. Mas para que o jogo se torne mais interessante, no caso de dois dados exibirem o mesmo valor, o jogador será obrigado a escolher obrigatoriamente o valor que ocorreu duas vezes. No caso dos três dados apresentarem os mesmos valores o jogador poderá optar por lançar novamente os dados ou então utilizar o valor obtido: 1, 2, 3, 4, 5, ou 6.

14.4.- Sugestões

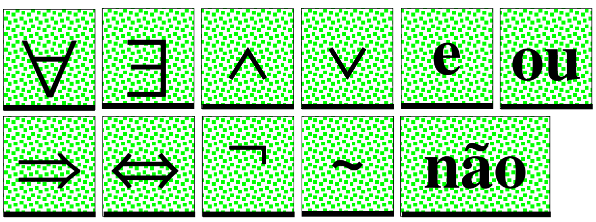
O mais importante nos Jogos Para o Pensamento todos os meus leitores sabem é a modificação, adaptação e/ou criação de novas regras e novos jogos. Com base nos jogos estudados acima o leitor deve tentar criar seus próprios jogos.

Uma idéia para novos jogos está na busca do conjunto de todos os valores contido no conjunto universo: U = { 0,1 , 2, 3,..., 10 } que satisfaçam um desigualdade dupla, como por exemplo:





Para estes e outros jogos seria interessante acrescentar aos nosso conjuntos de sinais e numerais os seguintes novos signos:



JARIT#15 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 15
ABRINDO CAMINHO COM SOMAS E PRODUTOS

Este é um jogo que envolve sorte – pois requer, para decidir a jogada, o lançamento de dois ou de três dados hexagonais –, mas que requer a escolha de estratégias adequadas em função da necessidade de se escolher o caminho mais curto para se atingir o objetivo, com maior rapidez.

15.1.- Objetivos do Jogo

Este é um Jogo Para O Pensamento Aritmético que associa estratégia e sorte. Ele é constituído de um tabuleiro com 100 casas onde os numerais de 1 até 10 são distribuídos aleatoriamente – levando-se em conta que os numerais de 1 a 10 deverão estar presentes em cada uma das linhas, mas não necessariamente nas colunas.

Há três tabuleiros distintos que podem ser impressos e utilizados no jogo: o amarelo, o verde e o azul, todos com uma distribuição distinta de numerais.

↓Final

4	2	3	1	6	9	5	7	10	8
2	8	5	7	10	4	6	1	3	9
6	8	4	9	1	7	3	10	5	2
10	9	6	2	3	8	5	1	7	4
1	3	7	6	4	2	5	10	8	9
4	9	2	8	10	7	6	5	3	1
9	7	6	10	1	3	4	2	5	8
4	2	1	3	6	8	5	7	10	9
3	8	10	4	5	9	7	2	6	1
7	3	2	5	8	4	10	1	6	9

↑Início

↓Final

6	8	4	9	1	7	3	10	5	2
2	8	5	7	10	4	6	1	3	9
4	2	3	1	6	9	5	7	10	8
10	9	6	2	3	8	5	1	7	4
1	3	7	6	4	2	5	10	8	9
4	9	2	8	10	7	6	5	3	1
7	3	2	5	8	4	10	1	6	9
4	2	1	3	6	8	5	7	10	9
3	8	10	4	5	9	7	2	6	1
9	7	6	10	1	3	4	2	5	8

↑Início

↓Final

1	3	7	6	4	2	5	10	8	9
9	7	6	10	1	3	4	2	5	8
4	2	1	3	6	8	5	7	10	9
6	8	4	9	1	7	3	10	5	2
7	3	2	5	8	4	10	1	6	9
4	9	2	8	10	7	6	5	3	1
2	8	5	7	10	4	6	1	3	9
3	8	10	4	5	9	7	2	6	1
4	2	3	1	6	9	5	7	10	8
10	9	6	2	3	8	5	1	7	4

↑Início

A caminhada nestes tabuleiros se dará casa por casa, a partir da casa marcada como *Início*. Esta caminhada, que visa atingir a casa marcada como *Final* depende de sorte e de estratégia, pois deverão ser lançados dois, ou três dados (a ser combinado pelos jogadores), aproveitando-se daqueles valores obtidos que permitam ao jogador avançar sobre o maior número possível de casas, baseado em estratégias ou heurísticas[12] pessoais.

[12] ***Estratégia:*** é a arte de aplicar com eficácia os recursos de que se dispõe ou de explorar as condições favoráveis de que porventura se desfrute, visando ao alcance de determinados objetivos. ***Heurística:*** é a arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objeto a descoberta dos fatos; método de investigação baseado na aproximação progressiva de um dado problema [Dicionário Houaiss Eletrônico].

Note que, o educador, à medida que aprende sobre o jogo, poderá elaborar seus próprios tabuleiros adaptados às suas necessidades pedagógicas.

15.2.- Material Necessário

Idealmente a quantidade de jogadores deve ser de 2 a 4 e devem utilizar-se do seguinte matéria:

- Um Tabuleiro da mesma cor para cada participante. Note que: os tabuleiros de todos os participantes devem ser sempre de uma mesma cor, isto é, todos os participantes devem usar o tabuleiro amarelo, ou todos usam o azul ou todos usam o verde (deve-se imprimir tantos tabuleiros quanto necessário);.
- Marcadores (botões coloridos – uma cor diferente para cada jogador), para marcar a casa que o jogador conseguiu acessar até aquele momento;
- Dois ou então três dados hexagonais (com seis faces numeradas de 1 até 6) que deverão lançados por cada um dos jogadores (os jogadores usarão em comum os mesmos dois ou três dados) quando for a sua vez de jogar.

15.3.- As Regras do Jogo

Atenção: A quantidade de dados a serem adotados durante o jogo (dois ou três) deve ser combinada antecipadamente pelos jogadores.

1. O primeiro jogador deve lançar os dois (ou os três) dados;
2. Este jogador deve adicionar os valores obtidos naquele lançamento;
3. Ele só poderá iniciar o jogo se os valores obtidos permitirem o acesso, pelo menos, à primeira casa, aquela que é indicada como *Início*;
4. Caso a soma dos valores permita que ele avance mais do que uma casa, ele deve então escolher a melhor estratégia possível para avançar pelo tabuleiro, a partir da casa em que esteja localizado o seu marcador, sobre as casas cuja *soma resulte menor ou igual* à soma dos valores obtidos na jogada dos dois (ou três) dados;
5. O jogador pode não utilizar totalmente, isto é, utilizar parcialmente, a soma dos valores obtidos no lançamento dos dados;

6. Haverá casos em que a soma dos dados não permitirá a avanço do seu marcador, ele deve então ceder a sua vez ao próximo jogador;
7. Pode-se combinar antes do início de uma partida: que o próximo jogador possa se aproveitar dos valores obtidos pelo jogador anterior, não precisado assim lançar os dados novamente;
8. Vence o jogador que atingir em primeiro lugar a casa final do seu tabuleiro.

15.4.- Algumas Sugestões

Há outras possibilidades de se caminhar sobre este tabuleiro, a saber:

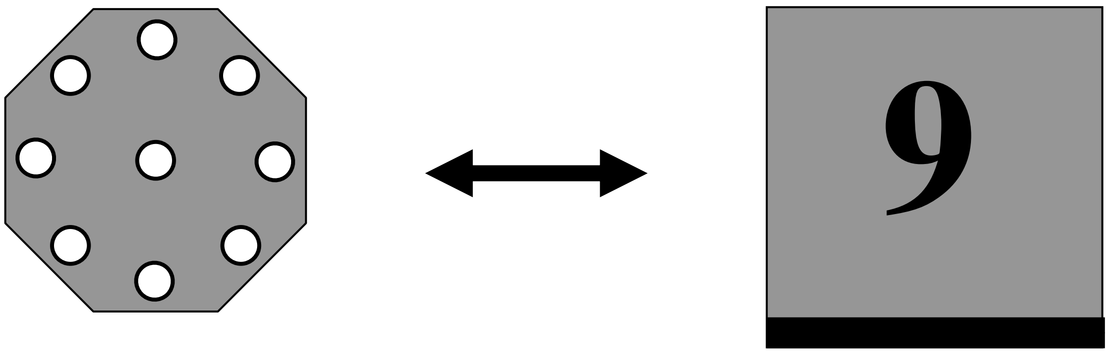
- Jogar com dois dados e somente caminhar quando um dos números obtidos em um dos dados, ou a soma dos dois valores, der exatamente a soma dos valores das casas que se pretende avançar, sendo que quando isto não ocorre o jogador deve passar a vez para o próximo jogador;
- Jogar com três dados e somente caminhar quando um dos números obtidos em um dos dados, a soma de dois dos valores ou então dos três valores, der exatamente a soma das casas que se pretende avançar, sendo que quando isto não ocorrer de maneira alguma, o jogador deve passar a vez para o próximo jogador;
- Jogar dois dados e caminhar tanto quanto possível somente com o produto destes números;
- Jogar três dados e escolher dois entre três dos valores obtidos para multiplicá-los e caminhar tanto quanto possível sobre o tabuleiro.

JARIT#16 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 16
ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES COM CARTÕES-NÚMERO

A idéia de Cartões Logicamente Impregnados estudada exaustivamente no JLOG#08 (vide nesta coleção: Volume 1 – Parte A) é retomado aqui para a criação de Cartões-Número Octogonais. Estes cartões associados ou não aos Cartões-Numerais nos permitirão concretizar as adições com transporte de unidades, bem como as subtrações com empréstimo de unidades.

16.1.- Cartões-Número Octogonais e Cartões-Numerais

Tanto o módulo básico dos cartões-número octogonais como o do seu correspondente, o modelo do cartão-numeral '9', são mostrados a seguir em seus tamanhos originais. O módulo básico dos Cartões-Número pode ter 9 perfurações ou então 9 pequenos círculos brancos desenhados sobre ele.



Estes dois tipos de cartões podem ser utilizados de forma a associar o número (quantidade) e o numeral (dígito hindu-arábico) numa correspondência biunívoca (correspondência um-a-um) na fase de aprendizagem inicial do processo de contagem e enumeração[13].

Os nossos cartões-número octogonais ser utilizados inicialmente como cartões de contagem, considerando-os correspondentes univocamente aos dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, podem ser utilizados também, e de forma mais ampla, com a finalidade de concretizar as operações aritméticas de adição, inclusive aquelas com transporte de unidades, e a subtração com o empréstimo de unidades como será mostrado ma seguir.

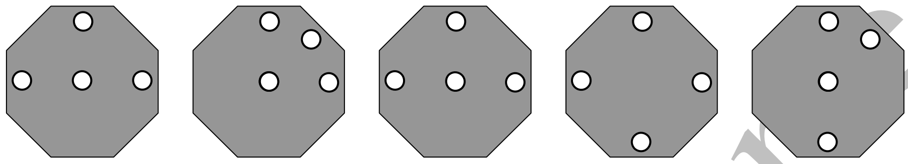
---

[13] enumeração: especificação, designação ou indicação de coisas uma por uma; listagem, relação metódica; contagem numérica; conta, cômputo.

16.1.1.- Utilizando os Cartões-Número Octogonais

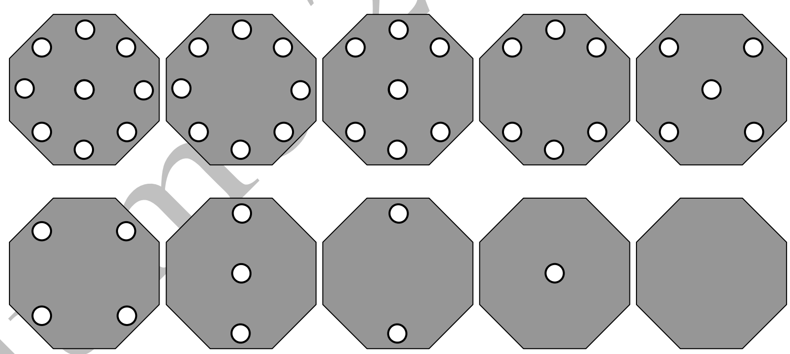
A partir do módulo com 9 furos ou 9 pequenos círculos, devemos escolher entre todas as possibilidades de disposições de furos (ou de círculos) aquelas que melhor representem os números (quantidades) de 0 até 9, ou seja, a disposição dos furos ou pequenos círculos devem ser pensados como cartões logicamente impregnados, e mais, impregnados pelo número que representam.

O conceito de cartões logicamente impregnados visto no JLOG#08 (item 8.1.2.2. do Volume 1 desta coleção) nos servirá de base para o seguinte questionamento: quais ou qual dos cartões a seguir, melhor representam o numero 4.



(a) (b) (c) (d) (e)

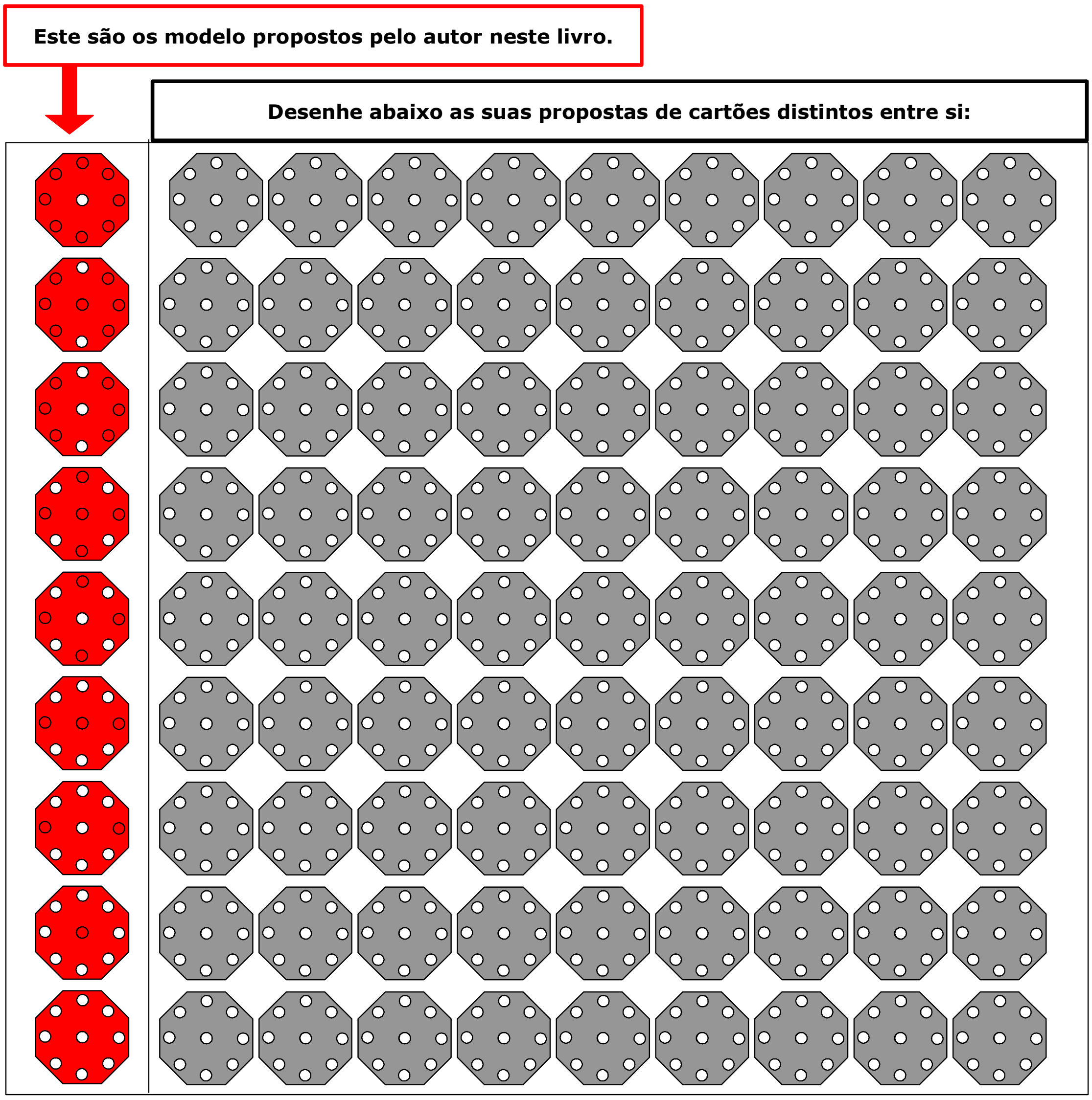
Certamente o leitor já escolheu o cartão que (visualmente ou logicamente, como queira pensar) melhor representa a quantidade ‘quatro’. Para saber se sua resposta de acordo com a do autor, o leitor deverá analisar a figura a seguir.



O leitor poderá discordar de algumas nossas escolhas, no entanto adotamos um critério, que no mínimo nos pareceu mais lógico, os números ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9, sempre têm um furo central, enquanto, os números pares: 2, 4, 6 e 8, com exceção do zero (por motivos óbvios), têm apenas furos nas bordas nas nossas fichas octogonais. O leitor insatisfeito com a distribuição dos minicírculos poderá adotar as suas próprias escolhas na representação dos dígitos. Para isto disponibilizamos a seguir uma ficha para que ele possa fazer as suas sugestões.

16.1.2.- Um Jogo Para o Pensamento: Gerando Outros Cartões

Acreditamos que o nosso leitor seja capaz de resolver este ***Jogo para o Pensamento*** que propomos aqui: quais são todas as possibilidades de obtenção de cartões octogonais distintos entre si com furações de nove até zero, obteníveis com o nosso cartão básico de nove furos?

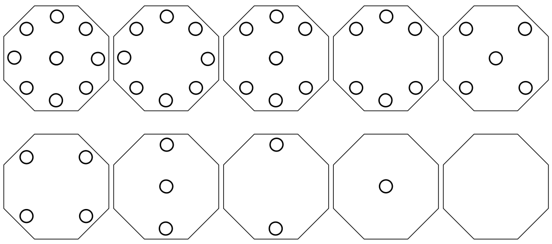


A figura acima apresenta uma malha contendo os cartões, todos eles com nove furos para que o leitor possa realizar seu jogo "fechando" os furos 'não desejados' utilizando-se de uma caneta verde. Aqueles que não se sentirem seguros, por favor, não se acanham em utilizar um lápis, e uma borracha bem macia. Esta ficha também pode está disponível para impressão no CD-R que acompanha este livro.

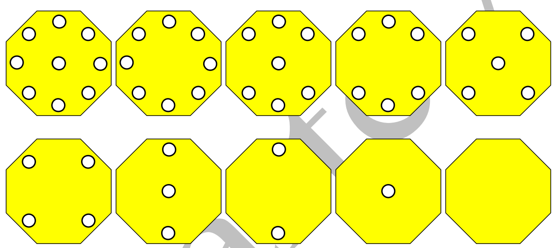
16.1.3.- A Família UDCM de Cartões Octogonais

Neste ponto vamos adotar 4 famílias de cartões octogonais de 0-9 coloridos de formas distintas: branco, amarelo, azul e vermelho, para representar respectivamente a unidade, a dezena, a centena e o milhar. Este conjunto com quatro famílias de cartões será denominado*: Cartões UDCM – Cartões Unidade, Dezena, Centena e Milhar.*

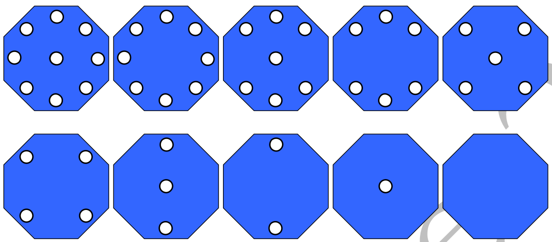
unidades:



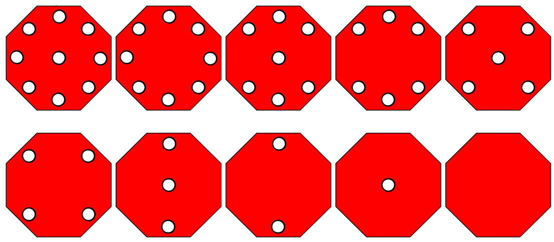
dezenas:



centenas:

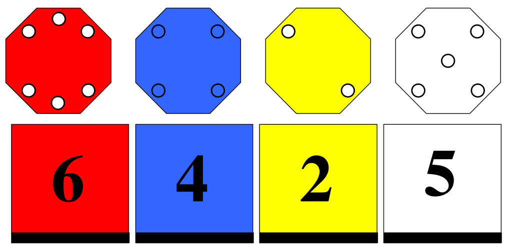


milhares:



16.1.4.- Associando os Cartões Octogonais e os Numerais

No CD-R que acompanha este livro o leitor irá encontrar quatro famílias de cartões-números contendo dígitos hindu-arábicos de zero até nove, nas cores: branco, amarelo, azul e vermelho, conforme apresentados a seguir. Estes novos cartões deverão ser utilizados juntamente com os cartões octogonais, em correspondências biunívocas (cartões octogonais ↔ cartões-números) como mostradas no exemplo a seguir.

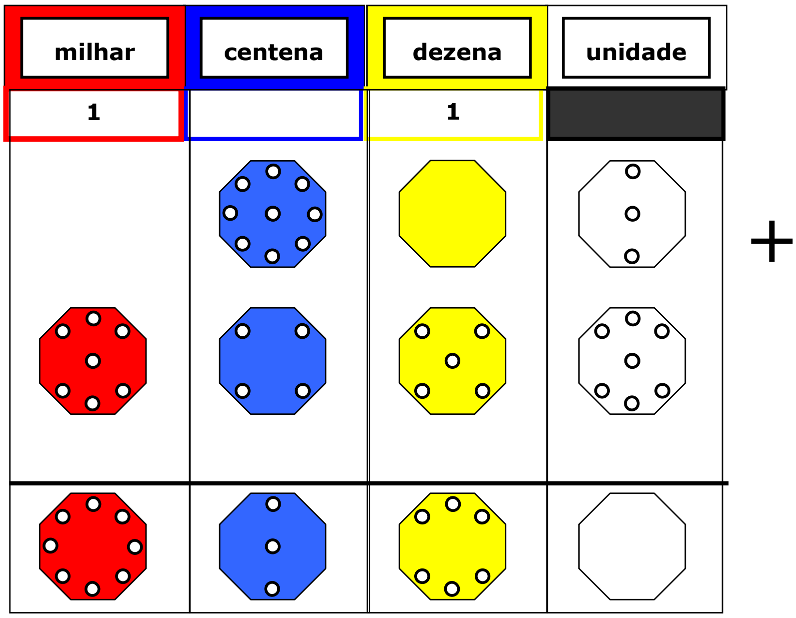


16.2.- Concretizando Adições, Subtrações e Multiplicações

Este material, o conjunto dos cartões Cores-Furos Numéricos Octogonais podem ser utilizados para a concretização das operações aritméticas: adição, subtração e multiplicação.

16.2.1.- Concretizando Adições Com Duas Parcelas

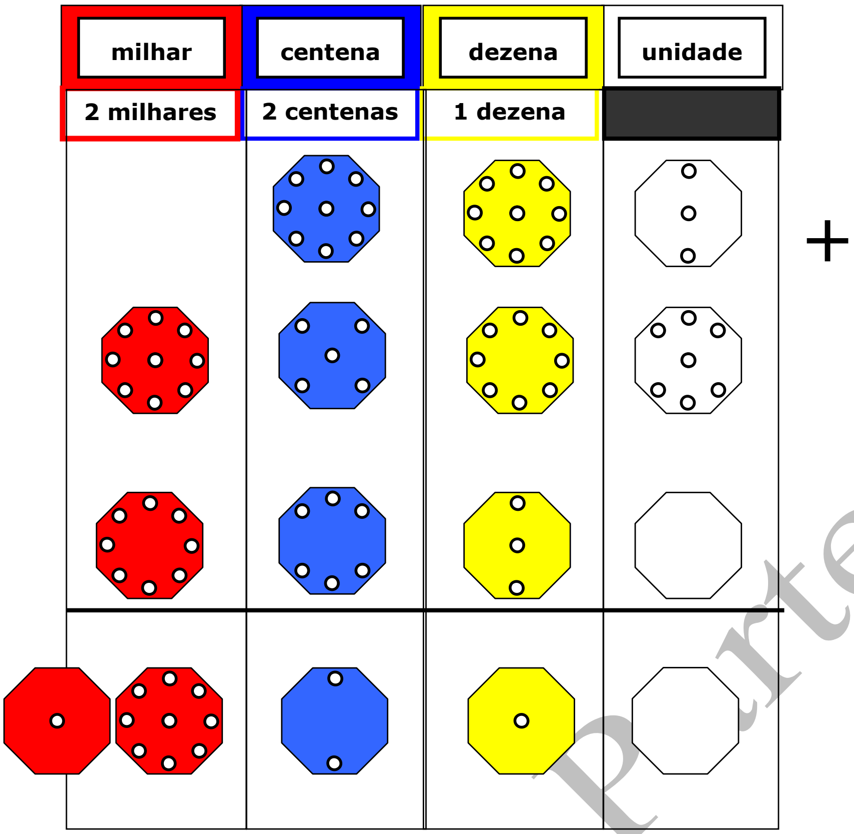
A tabela a seguir – que possui um locar para a anotação dos transportes de valores, o "vai 1" (ou o "vão 2" o que dependerá do número de parcelas – veja a seguir), e um traço para que se apresente a solução da operação, no caso uma adição, indicada pelo sinal "+" alocado ao lado das parcelas – mostra esta nossa particular escolha: as unidades na cor branca, as dezenas como amarelas, as centenas como azuis, os milhares como vermelhas.



A adição: 902 + 7.457 = 8.360

16.2.2.- Concretizando Adições Com Três ou Mais Parcelas

A tabela pode ainda ser utilizada para adições contendo 3 parcelas, neste caso pode ocorrer que haja o transporte de uma ou de até 2 unidades de uma para a seguinte ordem numérica, como por exemplo na adição: 289 + 37 + 48 = 374, pois quando se adicionam as unidades 9 + 7 + 8 a soma vale: 24, por outro lado quando se adicionam as dezenas, precedida do transporte (o 2) obtém-se: 2 + 8 + 3 + 4 = 17, e o transporte será apenas 1.



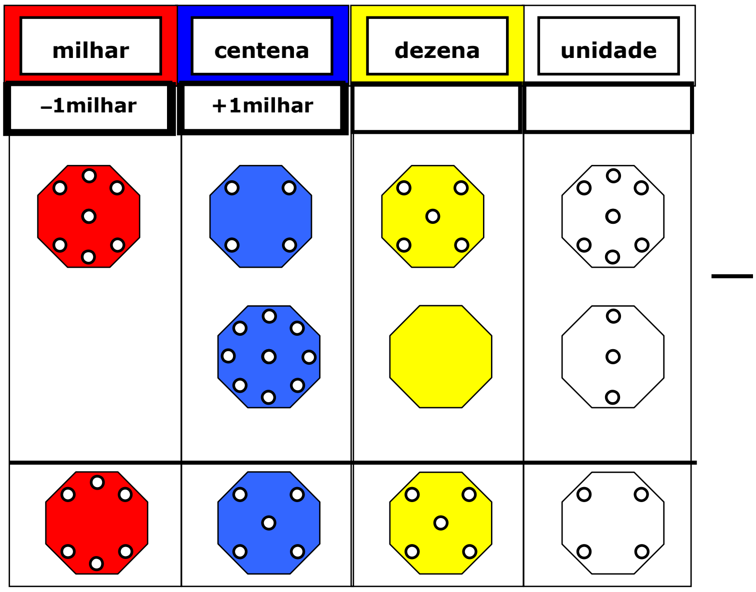
Adição de: 993 + 9587 + 8630 = 19.210

16.2.2.1.- Mais Exemplos a serem criados pelo Educador

Cabe ao educador a criação de outros exemplos de adições com 3, 4 ou mais parcelas com transporte de 1, 2, 3, ou mais unidades. Isto é deixado aqui como um Jogo Para o Pensamento Aritmético.

16.2.3.- Concretizando Subtrações

A seguir, meramente como mais um exemplo, mostramos uma subtração: 7.457 – 903 = 6.554, onde as anotações +1 milhar e −1 milhar indicam a quantidade de unidades retirada de uma ordem numérica superior e emprestada à ordem numérica inferior, para que se possa realizar a subtração.



16.3.- Os Cartões-Digitais Hindu-arábicos

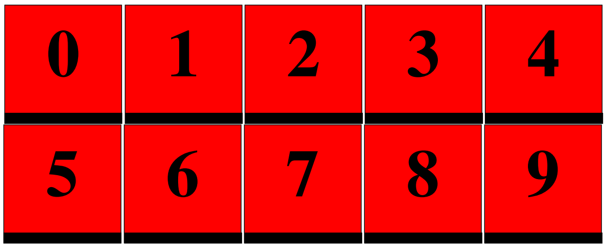
O conjunto de símbolos hindu-arábicos que representam os números que vão do 0 até o 9 são denominados dígitos hindu-arábicos. Por exemplo, o numeral 7.546.732 é um numeral com sete dígitos hindu-arábicos.

Os cartões a seguir, são cartões-numerais contendo os dígitos hindu-arábicos de 0 até 9, tendo os seus fundos nas cores: branco, amarelo, azul e vermelho, respectivamente representando: a unidade, a dezena, a centena e o milhar.

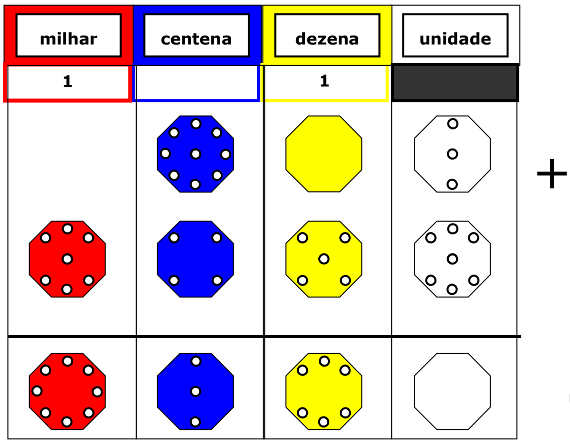
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

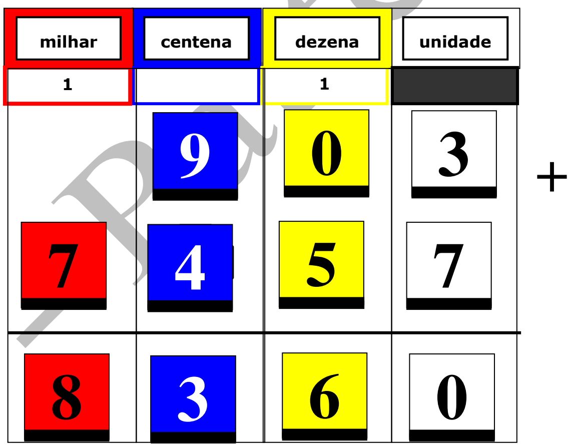
0	1	2	3	4
5	6	7	8	9

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9



Estes cartões deverão complementar, por associação, o trabalho iniciado com os *Cartões Cores-Furos Numéricos Octogonais, como no exemplo a seguir.*





De novo a adição: 902 + 7.457 = 8.360

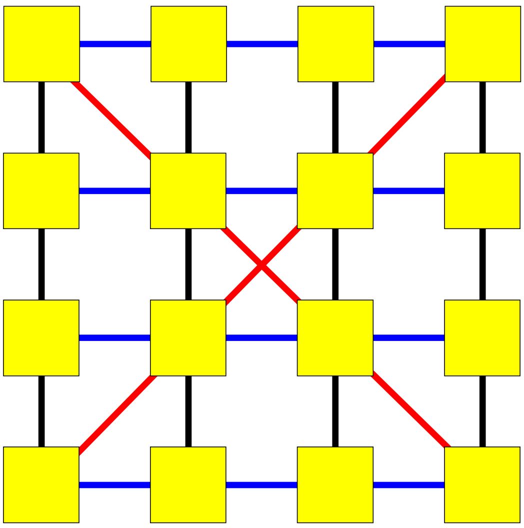
JARIT#17 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 17

Soma 'N' Numa Matriz 5X5

Gosto muito deste Jogo Para o Pensamento Aritmético porque el, apesar de ser tremendamente simples nos permite experienciar o que seja genuinamente um ***Jogo Para o Pensamento Lógico-Matemático.*** *Como as regras podem ser modificadas a cada nova partida de comum acordo pelos jogadores, tanto o jogo como o 'estudo' das novas regras (suas possibilidades, impossibilidades ou limitações) acabam por se constituir, elas mesmas, num novo Jogo para o Pensamento e, ao que tudo indica, este 'estudo' é, na prática, algo até mais interessante que o próprio jogo: um incrível novo Jogo Para o Pensamento.*

17.1.- Sobre O Tabuleiro e as Fichas do Jogo da Soma N

O *Jogo da Soma N* é formado por um tabuleiro com 16 quadrículas (em amarelo) e fichas com números de -10 até 10. As fichas de fundo verde apresentam os números negativos, enquanto a 'zero' está numa ficha com fundo branco, os números positivos estão em fichas com fundo azul claro, conforme pode ser visto na figura abaixo..



-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
-3	-2	-1	0	1	2	3
4	5	6	7	8	9	10

Um dos primeiros objetivos do jogo é a obtenção de um valor 'N', um número inteiro positivo, nulo ou então negativo, como uma mesma soma, tanto nas colunas, como nas diagonais e nas linhas do tabuleiro a partir da alocação de fichas numéricas (a alocação das fichas deve se dar nas quadrículas amarelas).

As linhas, colunas e diagonais podem ser denominadas genericamente como sendo filas da matriz.

17.2.- Sobre as Regras do Jogo

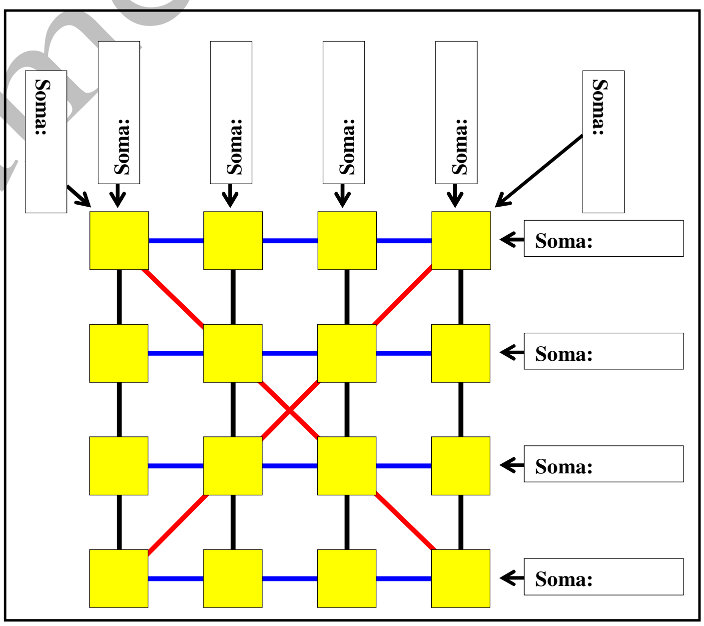
Antes de iniciar o jogo deve-se imprimir e plastificar o tabuleiro, bem como imprimir pelo menos seis conjuntos de fichas numéricas, conjuntos estes que devem ser plastificados para em seguida se recortar as fichas..

Quando o jogo se destinar a crianças que ainda não aprenderam as operações de adição no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{ 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$, deve-se utilizar apenas as fichas numeradas de 0 até 10.

17.2.1- Os Tipos de Jogo da Soma N

Há basicamente três forma de se jogar o Jogo da Soma N:

1. O Jogo do soma N, com N um valor fixado antes do início da partida, sendo que N pode variar de uma partida para outra:
    a. *O jogo para um só jogador* – um jogo solitário ou de paciência;
    b. O Jogo para dois ou mais jogadores;
2. O Jogo de somas variadas, em que se pode escolher e fixar, a cada nova partida, valores distintos para as somas, seja para as colunas, linha e para a diagonal Neste caso devem-se anotar estes diversos valores ou a palavra ‘Qualquer’ na folha de controle mostrada abaixo.



A escolha da palavra ‘Qualquer’ para *algumas das filas*, indicará que se aceita naquela fila um valor qualquer para a soma.

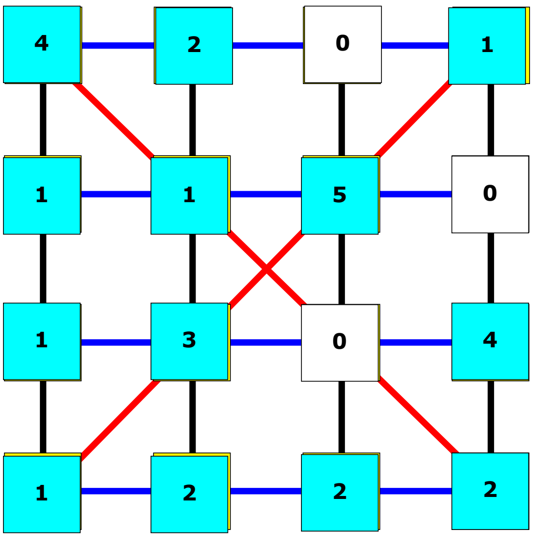
No CD-R que acompanha este livro o leitor encontrará uma folha com 6 destas tabelas de controle que pode ser impressa para serem usadas para as anotações.

17.2.2.- Regras do Jogo da Soma N

As regras do Jogo da Soma N são bastante variáveis e podem ser modificadas pelos jogadores a partir de acordos conforme é indicado pelo autor ao longo

17.2.2.1.- O Jogo Solitário ou Jogo de Paciência

Para estimular os leitores a criarem novas regras para este jogo nós mostramos a seguir exemplos de jogadas cujo objetivo seria o de preencher completamente o tabuleiro, para N = 7, utilizando-se apenas os números positivos e o zero, num jogo solitário. Note que isto quase foi conseguido, mas há uma diagonal em que a soma não resultou 7. *Verifique, e tente corrigir o problema.*



Pode-se pensar agora em outras regras:

- Preencher o tabuleiro com duas somas distintas N_1 ou N_2, que indiferentemente podem ocorrer em qualquer posição: algumas colunas, algumas linhas, ou em uma das diaginais diagonais;
- Preencher o tabuleiro com duas somas N_1 somente nas colunas e N_2 somente na linhas. Deixando livres as diagonais.
- Preencher com valores sucessivos, como por exemplo 7, 8, 9 e 10, respectivamente, a primeira, a segunda, a terceira e a quarta as colunas, e com um valor fixo N cada uma das linhas (será possível?).

- Propor o jogo com anotações distintas na folha de anotações, podendo se utilizar ou não a palavra 'Qualquer' em algumas ou várias das filas da matriz.

17.2.2.2.- O Jogo Para Duas ou mais Pessoas

Podem jogar duas, três ou até quatro pessoas. Joga-se com fichas numeradas, contendo os números inteiros de -10 até 10 (ou então com as fichas de 0 até 10). Cada um destes números (símbolos) consta de 6 fichas – lembrar que foram impressos e plastificados 6 conjuntos de fichas numéricas.

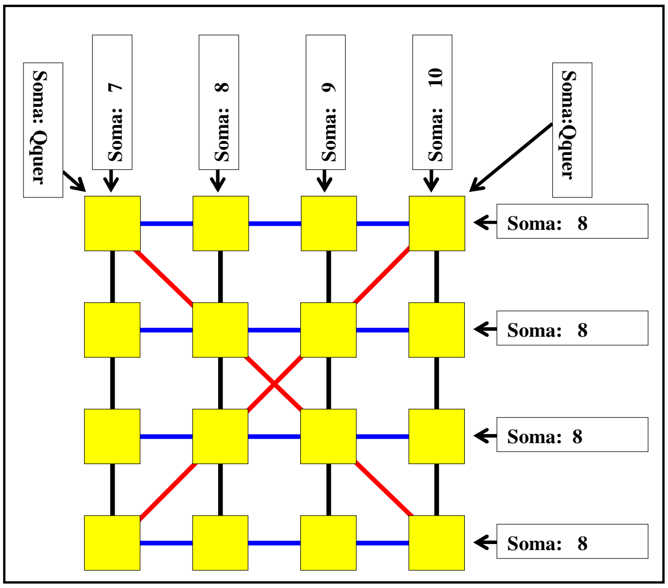
1. Os jogadores devem, antes de iniciar o jogo, estabelecer o número meta: N, cujo valor acabará por estar condicionado pelas regras 1 e 3, isto é: a soma de quatro números que devem resultar N, serão obtidas pelas fichas numeradas (de -10 até 10 ou então de 0 até 10).

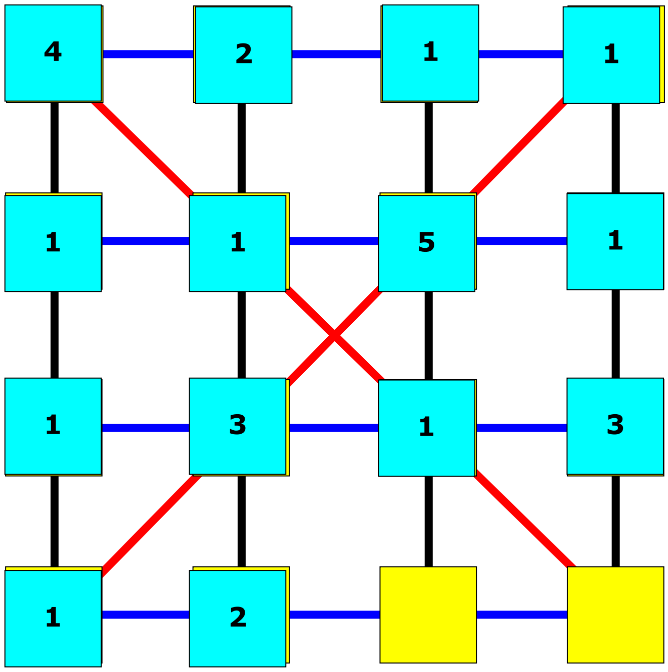
2. Inicialmente deve-se jogar apenas com as fichas de 0 até 10. Assim será razoável escolher-se N como sendo um valor, *por exemplo,* localizado entre 7 e 18. *Outros valores fora desta escala podem e devem ser tentados, com a finalidade de se verificar os limites possíveis na escolha de N.*

3. Escolhido o valor N para a soma, os jogadores devem colocar no tabuleiro, alternadamente uma ficha a cada vez, até que um deles vença, conseguindo completar a soma N seja numa coluna, numa linha ou numa diagonal. Note que a quantidade de conjuntos de fichas numéricas poderá ser modificada, para mais ou para menos (basicamente foram impressos apenas 6 conjuntos de fichas), de acordo com o que combinarem os jogadores.

17.2.2.3.- O Jogo Com valores de N variáveis por Linha, Colunas e Diagonais

Veja as anotações feitas numa Tabela de Controle e uma tentativa inicial de preenchimento do tabuleiro de acordo com as anotações que podem ser propostas por dois ou mais jogadores, e no caso do jogo solitário, pelo próprio jogador, ou por um oponente que jogará em seguida competindo com ele contra o relógio.





17.3.- Concluindo

Este, como foi dito na introdução, é um jogo bastante simples que ao ter suas regras modificadas pelos jogadores permite-lhes vivenciar o que sejam os Jogos Para o Pensamento. Muitas novas regras que podem ser tentadas podem ser possíveis ou impossíveis de serem implementadas, podem ter limitações intransponíveis, e isto deve ser explorado pelo leitor no seu caminho de aprender muito sobre os Jogos Para o Pensamento Lógico-Matemáticos.

JARIT#18 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 18

O que o Educador Precisa saber sobre a Tabuada de Multiplicar

Acredito que a maioria absoluta dos educadores que trabalham com as crianças nos primeiros anos de escolarização gostaria de saber o que fazer para que seus alunos aprendessem e fixassem a Tabuada de Multiplicar de forma rápida e com alegria. Isto parece que não ocorre na absoluta maioria das vezes, pois muitos dos estudantes do Ensino Fundamental e até mesmo do Ensino Médio apresentam dificuldades aparente intransponíveis ao tentarem calcular as tabuadas de multiplicar do 6, do 7, do 8 e do 9. O que iremos abordar neste JARIT#18 e no seguinte, JARIT#19, é uma método que poderá transformar os nossos alunos em Peritos na Tabuada de Multiplicar.

18.1.- Sobre a Tabuada de Multiplicar

Na Educação Matemática entende-se pelo nome genérico 'tabuada' as listas, tabelas ou 'tábuas' contendo as quatro operações fundamentais da aritmética envolvendo os números de zero a dez, usadas no aprendizado das quatro operações aritméticas.

As tabuadas são apresentadas às crianças no início da escolarização para levá-las à compreensão das operações de adição, subtração, divisão e multiplicação e à descoberta de suas propriedades elementares. No entanto, o que se vê na atual práxis escolar, é que a única tabuada estudada de forma exaustiva é a tabuada de multiplicar, e geralmente através do processo que os americanos denominam 'learning by rote'[14], isto é, 'aprendizagem por rotina:

> *A tabuada de multiplicar é aprendida através de um processo de memorização usando rotinas ou repetição, o que frequentemente acaba ocorrendo sem total empenho e atenção, ou mesmo sem compreensão por parte da criança'. Isto quer dizer que as crianças devem aprender a tabuada de multiplicar através de repetição, repetição, repetição ...*

No entanto, quando se constata que muitos estudantes do Ensino Fundamental e até mesmo do Ensino Médio apresentam dificuldade em calcular as tabuadas de multiplicar do 6, do 7, do 8 e do 9, podemos afirmar que este é um problema na maioria das vezes não resolvido, esbarrando numa

[14] **Do American Heritage Dictionary**: **1.** A memorizing process using routine or repetition, often without full attention or comprehension: *learn by rote.* **2.** Mechanical learning.

questão básica: como fazer com que as crianças aprendam a tabuada de multiplicar sem apelar para a 'memorização' – sem apelar para o 'learning by rote'? Fazê-las aprender de forma rápida e com alegria?

18.1.1.- A Tabuada de Multiplicar no Início da Escolarização

O *'problema da aprendizagem das tabuadas de multiplicar'* aparece já nos primeiros anos de escolarização e muitos são os questionamentos com que os educadores se deparam de forma insistentemente recursiva a cada novo ano escolar:

1ª Pergunta: A criança deve 'decorar' ('memorizar') todas as Tabuadas de Multiplicar?

2ª Pergunta: Como facilitar o processo de memorização da tabuada de multiplicar e verificar a aprendizagem com os 40 estudantes de uma sala de aulas?

3ª Pergunta: A criança deve memorizar algumas tabuadas e recorrer a elas para obter as demais? Há um método correto ou indicado para fazer isto? Deve-se aceitar que a criança utilize 'truques aritméticos' para calcular certos produtos, tal como decorar alguns valores e fazer adições sucessivas para completar o produto?

4ª. Pergunta: Contar nos dedos deve ser permitido no cálculo das tabuadas?

5ª Pergunta: Deve-se aceitar o uso do 'Lápis de Tabuada' ou de tabelas contendo as tabuadas de multiplicar?

6ª Pergunta: Há um método de aprendizagem da tabuada de multiplicar em que a criança possa controlar o seu progresso – um método de auto-aprendizagem secundado por auto-diagnóstco?

➔ **Veja as repostas a todas estas questões no item 18.3. no final deste JARIT.**

A resposta de muitas destas perguntas e questionamentos esbarram em problemas muito especializados a serem resolvidos no campo da Psicopedagogia[15] ou da Psicologia da Educação Matemática. No entanto, eu gostaria de responder a todas estas perguntar em função de minha experiência como educador e sobre algumas idéias por mim buscadas na Psicologia Cognitivista.

---

[15] Psicopedagogia: aplicação da psicologia experimental à pedagogia

18.2.- Sobre o ‘Aprender a Aprender’

A Psicologia Cognitivista (ou Psicologia Cognitiva), na medida em que estuda *a aquisição, processamento, armazenagem e recuperação de informações*, cunhou o conceito de que ‘aprender é processar informações’. Além disto, outros dois conceitos muito importantes para os educadores passaram a ser associados àquele: o conceito de ‘aprender a aprender’ e o ‘aprender sobre a aprendizagem’.

Se o ‘aprender a aprender’ é uma tarefa daquele que aprende, uma tarefa do educando, o ‘aprender sobre a aprendizagem’ é uma tarefa do educador. O educando que ‘*aprende a aprender alguma coisa*’ pode estar se iniciando no caminho da *aquisição de perícia cognitiva* em uma determinada área do conhecimento humano.

O educando que descubra uma forma de ‘aprender a aprender sobre a tabuada de multiplicar’ *através da descoberta de suas próprias maneiras de processar e recuperar os produtos das diversas multiplicações básicas* terá a rara oportunidade de entender o raciocínio matemático que será dele exigido ao longo dos vários outros anos de escolarização.

Se concordarmos com Cognitivista de que ‘*aprender é processar informações*’, ***o educador deve aceitar e até mesmo estimular*** que seus alunos: a partir das mais diversas multiplicações possam empregar na obtenção dos produtos corretos, diversos tipos de processamentos mentais extremamente pessoais e, às vezes, até muito complexos:

- *Substituições de uma ou mais multiplicações por outras*, como por exemplo, em: $6\times5 = 3\times10 = 30$, ou então em: $8\times9 = 4\times9 + 4\times9 = 36 + 36 = 72$, ou então em: $6\times9 = 3\times9 + 3\times9 = 27+27 = 54$;
- *Cálculo através de adições sucessivas*, como por exemplo, em: $6\times5 = 5+5+5+5+5+5 = 10+10+10 = 30$ ou em $6\times6 = 3\times12 = 12+12+12 = 36$;
- *Subtrações de valores, a um dado produto que seja superior àquele produto pretendido*, como por exemplo, em: $9\times8 = 10\times8 - 8 = 80 - 8 = 72$, ou então em raciocínios bastante complexos: $8\times7= 8\times8 - 8 = 64 - 8 = (64 - 4) - 4 = 60 - 4 = 56$;
- *Adições de valores, a um dado produto que seja inferior àquele produto pretendido*, como por exemplo, em: $7\times8 = 6\times8 +8 = 48+8 = 56$ (normalmente esta adição é feita auxiliada pela contagem nos dedos!) ou em $7\times7 = 7\times5 + 7 + 7 = 35+14 = 49$.

O nosso problema será a partir de agora saber como transformar os nossos alunos em calculadores peritos da Tabuada de Multiplicar.

18.2.1.- Sobre a Aquisição de Perícia Cognitiva

A *aquisição de perícia cognitiva* consiste no desenvolvimento de habilidades notáveis a serem empregadas para resolver problemas de cunho intelectual, quando o sucesso nesta tarefa é muito mais determinado pelo domínio de um conhecimento específico do que pela destreza física.

O processo de aquisição de perícia cognitiva é bem diferente da aquisição de perícia motora. Capacidades motoras associadas a habilidades intelectuais é que permitirão a aquisição de perícia motora. Por outro lado, de forma mais ampla, o Construcionismo (*vide nos Prolegômenos deste livroo item 0.5. sobre As Ideias de Seymour Papert e Caleb Gategno*) ensina que habilidades intelectuais podem ser adquiridas através de atividades motoras sob a forma de construção de artefatos e objetos significativos, como já se expôs anteriormente, neste capítulo.

A *aquisição de perícia cognitiva* tem suas raízes históricas firmadas nos estudos da resolução de problemas, no sentido de buscar o porquê das dificuldades encontradas por seres humanos nos processos envolvidos nestes tipos de atividade.

Os educadores dos anos iniciais de escolarização terrão a chance de se defrontar com uma possível solução para o problema da aquisição de *Perícia Cognitiva no Processamento da Tabuada de Multiplicar* no JARIT#19*,* onde a aquisição desta perícia será estimulada por um jogo muito dinâmico que ali será apresentado.

18.2.2.- Definindo Capacidade, Habilidade, Competência, Perícia

Nesta altura de nossos estudos, algumas definições são necessárias de forma a não se deixar dúvidas sobre o que se entende, neste texto, por *capacidade, habilidade, competência* e, finalmente, *por perícia*:

- ***Capacidade*** é o poder efetivo para realizar um ato, físico ou mental, decorrente ou não de aprendizagem.
- ***Habilidade*** é a capacidade de realizar tarefas motoras ou mentais com facilidade, precisão e adaptabilidade à variação de condições, o que implica a posse, por parte do

indivíduo, de habilidades motoras ou habilidades intelectuais.

- ***Competência*** é o grau de adaptação a uma determinada espécie ou modalidade de tarefa.
- ***Perícia*** é uma notável habilidade que envolve um alto grau de conhecimento associado a um alto grau de competência numa área específica (ou domínio) do conhecimento humano.

18.2.2.1.- O que se espera de um Perito

A perícia é geralmente adquirida pelos indivíduos através do acúmulo de experiência ou de treinamento. Em resumo, porções amplas e mentalmente bem estruturadas de conhecimento é que podem levar os indivíduos, através de treinamento adequado, à perícia. Espera-se que um perito demonstre possuir, ao resolver um problema, as seguintes habilidades:

- *Representar o problema estabelecendo caminhos (onde se prevejam inferências diretas e sequenciais) que possam levar à solução;*
- *Ter conhecimento suficiente sobre o rumo dos encaminhamentos a tal ponto que possa escolher, a partir de cada uma das soluções intermediárias, o caminho mais promissor;*
- *Vislumbrar como a solução de subproblemas pode interferir na solução dos outros subproblemas;*
- *Descrever os estados (passos) do problema de forma suficientemente abstrata, ou seja, saiba estabelecer a seqüência de estratégias cognitivas envolvidas na resolução do problema ou de cada passo, estabelecendo heurísticas ou esboçando algoritmos[16];*
- *Avaliar suas estratégias, passos, encaminhamentos e resultados de forma bastante ampla e segura, garantindo ou certificando estas avaliações;*
- *Planejar mentalmente os caminhos de resolução dos problemas, visualizando seqüências de passos intermediários possíveis que levem à solução ou à resposta.*

18.2.3.- Sobre o Avaliar e o Verificar a Aprendizagem

Não se deve confundir a aprendizagem com desempenho. A ***aprendizagem*** se dá no interior dos organismos, enquanto o ***desempenho*** se refere aos comportamentos emitidos pelo indivíduo que

[16] Algoritmos: conjunto das regras e procedimentos lógicos perfeitamente definidos que levam à solução de um problema em um número finito de etapas.

esteja sendo avaliado, e que sejam observáveis (qualificáveis ou computáveis) pelo avaliador, e no nosso caso, o observador será um educador – o professor de Matemática?

Qualquer educador sabe que dados quantitativos globais, como as médias escolares, são pouco representativos quando se pretende saber o que realmente foi assimilado pelo aprendiz, e mais, na Psicologia Cognitivista o que se busca não é a avaliação do desempenho, mas a verificação de aprendizagem, ou ainda, *a verificação qualitativa da aprendizagem.*

Somente para citar um exemplo, todos nós educadores sabemos que se em uma mesma avaliação escrita, alguns estudantes obtiveram nota 7,0 eles necessariamente não acertaram as mesmas questões e nem mesmo mostrariam o mesmo desempenho em outras provas. A nota 7,0 destes estudantes representa apenas o resultado 'eventual' de uma *avaliação quantitativa*, ela não representa absolutamente nada em termos de avaliação qualitativa.

Baseado no argumento acima se julga que poderemos entender o porquê da Psicologia Cognitivista contestar a validade dos resultados obtidos em testes de QI (Quociente de Inteligência), tão caros aos psicólogos behavioristas.

Outra coisa a ser considerada, e aqui falamos da Psicologia Cognitivista, é que o educador não deve focar o seu trabalho nas *avaliações quantitativas do conhecimento*, mas avaliar *qualitativamente a aprendizagem,* ou seja, *verificar a aprendizagem.*

O material (um jogo pedagógico) apresentado a seguir no JARI#19 permitirá ao educador verificar a cada passo a aprendizagem da tabuada por seus alunos obtendo diagnósticos bastante precisos daquela aprendizagem.

18.2.4.- Sobre a Verificação da Aprendizagem

Pela própria natureza da Psicologia Cognitivista, a qual considera que os eventos internos ao indivíduo não são avaliáveis, falar de avaliação do conhecimento através de um desempenho eventual não tem sentido, é a por isto que iremos falar sobre *Verificação da Aprendizagem* e jamais sobre *Avaliação do Conhecimento.*

A Psicologia Cognitivista lança mão de entrevistas, diálogos, testes, manipulações sobre materiais concretos, simulações, auto-avaliação etc., para verificar a aprendizagem, mas algumas destas técnicas têm, por questões práticas, seus resultados emitidos de forma quantitativa ao invés de qualitativa. Os resultados quantitativos inevitáveis, obtidos em alguns destes processos de verificação da aprendizagem, devem ser considerados um mero componente de um processo maior de verificação do conhecimento, que deve envolver outras formas de sondagem do conhecimento.

18.2.4.1.- A Verificação Qualitativa da Aprendizagem

Uma excelente forma de se avaliar qualitativamente a aprendizagem, ou ainda, o conhecimento adquirido num dado processo de aprendizagem, é um tipo de entrevista denominada por Piaget: "entrevista clínica". A *entrevista clínica piagetiana* se caracteriza por estabelecer que o avaliador deverá estar preocupado tanto com as respostas corretas ou "pertinentes", quanto com as respostas não esperadas ou "não-pertinentes", e deve utilizar a contra-sugestão como elemento fundamental para a confirmação do raciocínio daquele que aprende.

18.3.- Respondendo às Perguntas do Item 18.1.1.

O leitor não deve buscar a facilidade de saltar do item 18.1.1. para este item em busca das respostas. Sugiro que o educador interessado deva ler todo texto antes de compreender o porque das respostas dadas aqui. O texto fundamenta e justifica as nossas respostas.

1ª Pergunta: A criança deve 'decorar' ('memorizar') todas as Tabuadas de Multiplicar?

Resposta à 1ª Pergunta: A criança **NÃO DEVE SER FORÇADA** a memorizar a tabuada de multiplicar! (veja abaixo a resposta dada à 5ª Pergunta).

2ª Pergunta: Como facilitar o processo de memorização da tabuada de multiplicar e verificar a aprendizagem com os 40 estudantes de uma sala de aulas?

Resposta à 2ª Pergunta: O professor pode facilitar muito processo de memorização e verificação da aprendizagem da Tabuada de Multiplicar sem forçar o indivíduo a fazê-lo de forma desagradável. Eu utilizava uma maneira agradável de facilitar a memorização da Tabuada de Multiplicar quando ministrei aulas de Matemática do Ensino Fundamental e Médio: Numa folha de papel A4 eu escrevi com um pincel atômico – ocupando praticamente toda a folha – cada uma das multiplicações (sem o produto) das tabuadas do 6 em diante. No final das aulas, quando havia tempo, eu embaralhava bem estas folhas e as exibia uma para cada aluno de forma que eles dissessem o produto correspondente àquela multiplicação. Muito divertido era quando apresentada, por exemplo, a multiplicação 9×7 eu tinha que lembrá-los que 9×7 era o mesmo que 7×9, lembrando ainda que esta era a propriedade comutativa da multiplicação. O aluno que errava, cedia a sua vez ao seguinte que geralmente respondia com entusiasmo ao que fora pedido ao aluno anterior. Este era, sem dúvida alguma, um

processo pedagógico que sempre me pareceu muito eficaz e até mesmo divertido não somente para os alunos, mas para mim, pois acontecia de, em algumas salas de aula, até do Ensino Médio, em que alguns alunos, nos finais ociosos de algumas aulas, pediam o 'Jogo da Tabuada'.

3ª Pergunta: A criança deve memorizar algumas tabuadas e recorrer a elas para obter as demais? Há um método correto ou indicado para fazer isto? Deve-se aceitar que a criança utilize 'truques aritméticos' para calcular certos produtos, tal como decorar alguns valores e fazer adições sucessivas para completar o produto?

Resposta à 3ª Pergunta: SIM! Todo procedimento ou raciocínio aritmético pessoalmente descoberto pela criança para calcular um produto a partir de uma multiplicação, deve ser aceito e estimulado, solicitado que a criança o explique para os colegas: "– Para calcular o 6×5 eu calculo o 5×5 e adiciono mais 5, conseguindo 30"; "– Para calcular 9×7 eu calculo o 10×7 e subtraio 7, logo 9×7 = 70 – 7 = 63". E assim, muitos outros raciocínios inesperados podem ser 'descobertos' pelo professor, o que não resta dúvida, é bastante piagetiano e construtivista!

4ª. Pergunta: Contar nos dedos deve ser permitido no cálculo das tabuadas?

Resposta à 4ª Pergunta: SIM! SIM! SIM! As crianças podem e até devem contar nos dedos! – Os homens primitivos contavam nos dedos e aí está a nossa primeira calculadora decimal: foram os nossos dez dedos que permitiram criar a base de numeração decimal.

5ª Pergunta: Deve-se aceitar o uso do 'Lápis de Tabuada' ou de tabelas contendo as tabuadas de multiplicar?

Resposta à 5ª Pergunta: Não, de maneira alguma! O Lápis de Tabuada é uma espécie de artefato maligno que ao trazes as Tabuadas impressas no seu delgado e colorido corpinho, introduz na mente de seu usuário o vírus da preguiça mental que ataca e destrói toda possibilidade de que uma criança um dia venha a saber as multiplicações padrão (do 1×0 até o 10×10). As consequências disto vão acompanhar esta criança pelo resto de sua vida

escolar, fazendo com que não aprenda direito a divisão, a potenciação, a extração de raízes quadradas e cúbicas, e isto, sem mencionar os problemas que irão surgir quando ela for aprender Álgebra ou até mesmo Geometria e precisar realizar operações que envolvam multiplicações ou divisões. E há um problema ainda maior, na medida em que o Lápis de Tabuada precisa ser usado para escrever, ele tem que ser apontado, e algumas das tabuadas vão sendo perdidas para sempre ... Um lápis de Tabuada nunca pode ser apontado!

6ª Pergunta: Há um método de aprendizagem da tabuada de multiplicar em que a criança possa controlar o seu progresso – um método de auto-aprendizagem secundado por auto-diagnóstco?

Resposta à 6ª Pergunta: Talvez haja vários métodos que permitam a autoaprendizagem e o autodiagnóstico no processo de tentar aprender sozinho a tabuada de multiplicar. A seguir o leitor vai encontrar um método – que eu não sei bem se criei, adaptei ou encontrei por aí em partes que eu consegui juntar num só –, que permite, com base em materiais concretos fáceis de elaborar, tanto ao educando como ao educador diagnosticarem, a cada passo, o progresso da aprendizagem da tabuada de multiplicar.

18.4.- A Título de Conclusão

O educador não pode perder a oportunidade ímpar de compreender de fato, através da leitura destes dois textos (JARIT#18 e JARIT#19). o que seja o 'aprender a aprender', 'o aprender sobre a aprendizagem' e que a verdadeira aprendizagem se prende ao seguinte: 'a aprendizagem significativa ocorre quando aprendemos a processar informações num dado campo do conhecimento humano e não quando somos obrigados a memorizar coisas aparentemente sem sentido através de monótonas rotinas que envolvem repetições sucessivas'.

Numa sala com 40 alunos a repetição de rotinas entediantes destinadas à "aprendizagem (!)" da tabuada de multiplicar deve ir aborrecendo e entristecendo cada vez mais aqueles que já aprenderam a tabuada mas que, em função dos alunos que ainda não dominam todos os aspectos daquelas multiplicações e produtos, continuam tendo que repetir, repetir e repetir a rotina de memorizar algo que deveria ser aprendido de forma rápida e com alegria.

Um livro recém editado de Marcelo Tas corrobora esta nossa tese, o livro se intitula “É rindo que se Aprende”, e eu peço licença ao autor para assinar embaixo deste título tão incrível, estimulante e verdadeiro.

JARIT#19 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 19

Jogando para Aprender e Fixar a Tabuada de Multiplicar

Este é um jogo que oportuniza a aprendizagem e a fixação da tabuada de multiplicar usando (a) uma 'máquina' de calcular de papel, (b) cartões com as tabuadas: do 2×0 até 9×10 e (c) duas caixas para autodiagnóstico com as etiquetas: "Sei!", "Não sei ainda!" e (d) duas caixas de diagnóstico, com as etiquetas "Acertou!", "Não sabe ainda!", que permitem respectivamente ao estudante e ao educador verificarem o status da aprendizagem.

19.2.- 'Aprender a Aprender' sobre a Tabuada de Multiplicar

O material pedagógico concreto apresentado neste JARIT foi desenvolvido para ser utilizado de acordo com o conceito fundamental adotado pela Psicologia Cognitivista: *"Aprender é processar Informações",* sendo que, os educandos e educadores terão a genuína oportunidade experienciar concretamente os conceitos *construtivistas* do "aprender a aprender" e do "aprender sobre a própria aprendizagem". Aos educadores será dada ainda a grata oportunidade de "aprender sobre as formas de aprendizagem de seus alunos".

Este material permite a descoberta dos diversos procedimentos numéricos envolvidos no cálculo mental da multiplicação e a concretização dos diversos produtos das tabuadas de multiplicar desde a tabuada do 1 até a do 10.

19.3.- O Material Didático-Pedagógico a ser Pré-elaborado

O material é composto por vários dispositivos fáceis de serem elaborados, todos eles em papel cartão, cartolina ou papel sulfite, a saber:

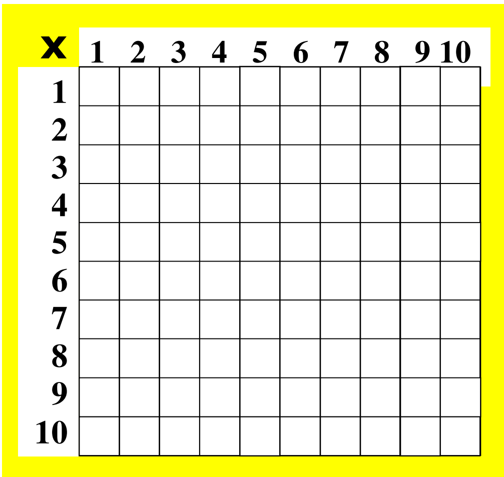
1. Uma *Máquina de Calcular de Papel* e duas tiras de cartolina denominadas delimitadores;
2. Duas folhas de papel A4 com as tabuadas: a primeira contendo as multiplicações, sem o produto, de 2×0 até 5×10 e a segunda contendo as multiplicações, sem o produto, de 6× 0 até 9×10;
3. Uma folha de papel A4 contendo multiplicações indicadas do zero e do 1: desde o 0×0 até o 0×10 e do 1×0 até o 1×10;
4. Quatro caixas confeccionadas em cartolina para serem utilizadas para avaliação e autoavaliação da aprendizagem da tabuada (da parícia) ou ainda, no diagnóstico e no autodiagnóstico da aprendizagem, sendo duas caixas

para autodiagnóstico com as etiquetas: “Sei!”, “Não sei ainda!” e duas caixas de diagnóstico, com as etiquetas “Acertou!”, “Não sabe ainda!”.

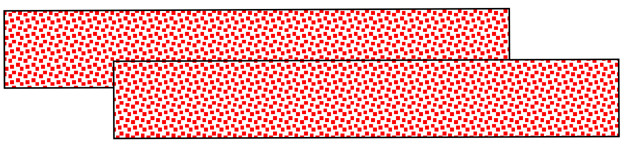
Todos estes dispositivos estão disponíveis para impressão no CD-R que acompanha este livro. O educador pode pré-elaborar este material, imprimindo-o e plastificando-o, deixando para os seus alunos os recortes necessários.

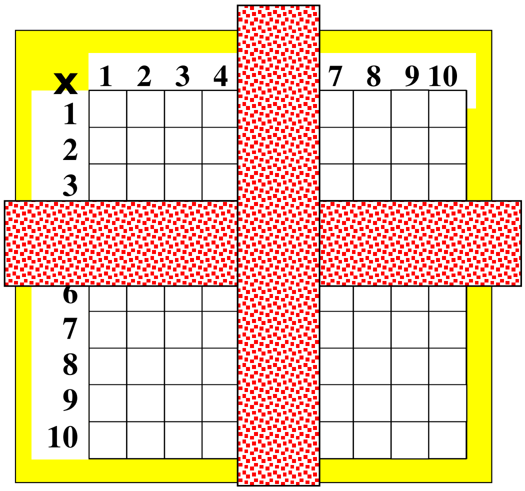
19.3.1.- A Máquina de Calcular de Papel e os Delimitadores

A máquina de Calcular de Papel deverá ser construída com uma malha de 10cm×10cm numerada na horizontal de 1 até 10 e, na vertical, também de 1 até 10 de acordo com a figura a seguir que deve ser colada sobre um anteparo colorido. Utilizar para o quadriculado, o papel denominado, algumas vezes, *papel pedagógico* ou papel quadriculado – onde as quadrículas medem 1cm×1cm – encontrável em folhas de almaço nas papelarias.



Os delimitadores podem ser feitos de papel cartão colorido medindo 2cm ou 3 cm de largura por 13cm de comprimento. São duas, as faixas a serem utilizadas para delimitação das quadrículas, tanto na horizontal como na vertical, cuja forma de utilização é mostrada a seguir.





19.3.2.- As Folhas Com Fichas Contendo as Multiplicações

As duas folhas de fichas contendo as principais multiplicações: a primeira folha contendo as tabuadas de multiplicar do 2, 3, 4 e 5; a segunda folha contendo as tabuadas do 6, 7, 8 e 9, prevendo-se, assim, duas etapas distintas de aprendizagem.

2×0	3×0	4×0	5×0
2×1	3×1	4×1	5×1
2×2	3×2	4×2	5×2
2×3	3×3	4×3	5×3
2×4	3×4	4×4	5×4
2×5	3×5	4×5	5×5
2×6	3×6	4×6	5×6
2×7	3×7	4×7	5×7
2×8	3×8	4×8	5×8
2×9	3×9	4×9	5×9
2×10	3×10	4×10	5×10

6×0	7×0	8×0	9×0
6×1	7×1	8×1	9×1
6×2	7×2	8×2	9×2
6×3	7×3	8×3	9×3
6×4	7×4	8×4	9×4
6×5	7×5	8×5	9×5
6×6	7×6	8×6	9×6
6×7	7×7	8×7	9×7
6×8	7×8	8×8	9×8
6×9	7×9	8×9	9×9
6×10	7×10	8×10	9×10

As tabuadas do 2 até a do 5 devem ser aproveitadas para se introduzir através da propriedade comutativa da multiplicação algumas multiplicações e produtos das tabuadas do 6, 7, 8, e 9, como nos casos:

$2\times6 = 6\times2$; $2\times7 = 7\times2$; $2\times8 = 8\times2$; $2\times9= 9\times2$; $2\times10 = 10\times2$;

$3\times6 = 6\times3$; $3\times7 = 7\times3$; $3\times8 = 8\times3$; $3\times9= 9\times3$; $3\times10 = 10\times3$;

$4\times6 = 6\times4$; $4\times7 = 7\times4$; $4\times8 = 8\times4$; $4\times9= 9\times4$; $4\times10 = 10\times4$;

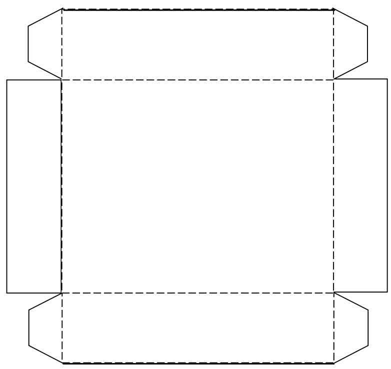
5×6 = 6×5; 5×7 = 7×5; 5×8 = 8×5; 5×9= 9×5; 5×10 = 10×5;

A folha de fichas contendo as multiplicações do zero, um e dez: estas são as tabuadas que podem ou não ser introduzidas a critério do professor.

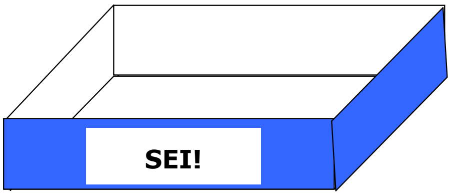
0×0	**1×0**	**10×0**
0×1	**1×1**	**10×1**
0×2	**1×2**	**10×2**
0×3	**1×3**	**10×3**
0×4	**1×4**	**10×4**
0×5	**1×5**	**10×5**
0×6	**1×6**	**10×6**
0×7	**1×7**	**10×7**
0×8	**1×8**	**10×8**
0×9	**1×9**	**10×9**
0×10	**1×10**	**10×10**

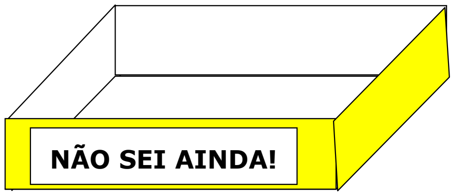
19.3.3.- As Caixas de Diagnóstico e Autodiagnóstico

A seguir mostramos um molde das caixas de diagnóstico e auto-diagnóstico:

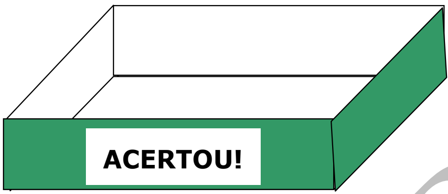


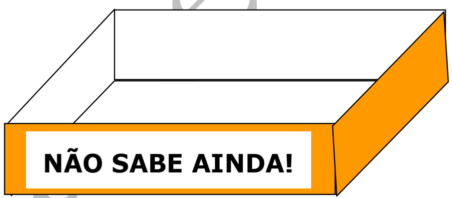
As duas Caixas de Auto-avaliação da Perícia, que permitem o autodiagnóstico que devem ser confeccionadas com papel cartão em cores distintas e etiquetadas com “SEI!” e “NÃO SEI AINDA!”.





As duas *Caixas de Avaliação da Perícia* a serem utilizadas pelo educador, servem para o diagnóstico, devem ser confeccionadas com cores distintas uma da outra. e etiquetadas com "ACERTOU!" e "NÃO SABE AINDA!".





Estas caixas devem ser utilizadas periodicamente pelo educador, para "tomar" as tabuadas, com finalidade diagnóstica e corretiva. Caso a criança tenha dificuldade em cálculos complexos educador deve dar sugestões (somente para citar um exemplo: sugerir que '9×8' pode ser calculado como '$10 \times 8 - 1 \times 8$' ou '$8 \times 8 + 8$').

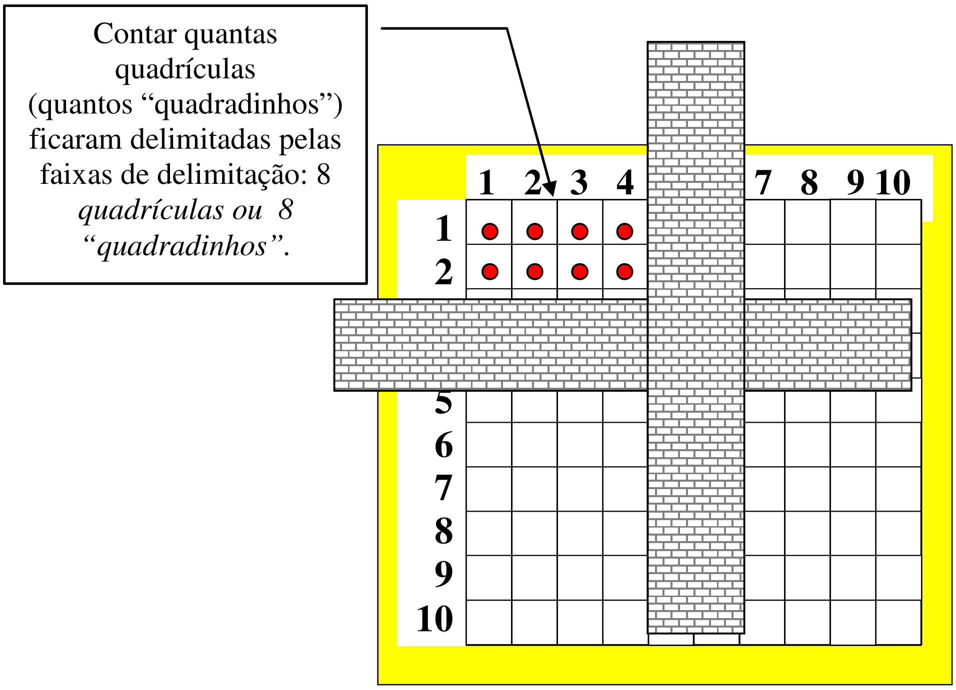
Sugestão: As tampas do Requeijão Catupiry podem ser bem aproveitadas na tarefa de servirem de caixas de avaliação bem como muito úteis para aguardar o material.

19.4.- As Atividades Sugeridas

A seguir são propostas uma série de atividades com o material concreto anteriormente apresentado. As atividades não são obrigatórias e nem mesmo a seqüência das mesmas o é. O educador deverá adaptá-lo ao modelo de estudante e a cada situação.

19.4.1.- Aprendendo a Adição, para depois aprender a Multiplicação

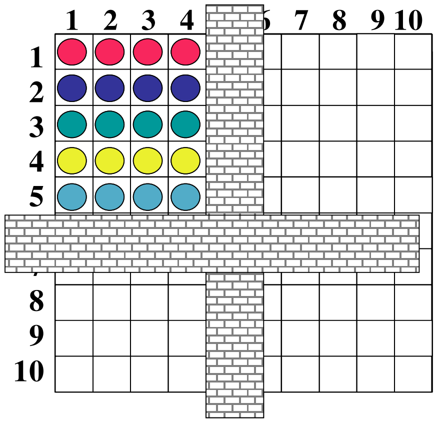
Sabe-se que aprendizagem do conceito de multiplicação depende diretamente do completo entendimento do conceito de adição, como será mostrado a seguir. É através do conceito de adição que a criança deve entender o conceito de multiplicação, como por exemplo, a operação "2×3" como sendo: "$3 + 3$" ou "$2 + 2 + 2$" resultados estes que já poderiam ser concretizados na nossa "máquina calculadora" como:

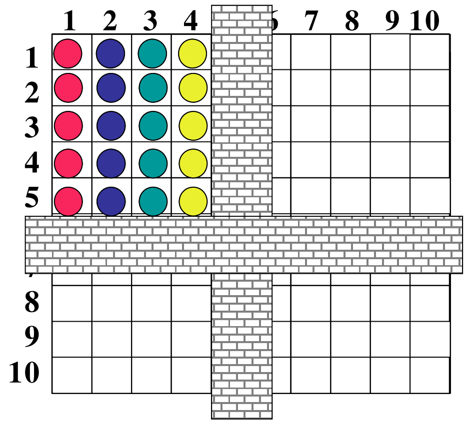


Observe que o uso dos delimitadores é extremamente importante, mas mais importante é fazer a criança entender que “2 × 3” é igual a “3 × 2” – o que para nós está claro, devido à propriedade comutativa da multiplicação –, mas isto deve ser esclarecido para a criança já no início da aprendizagem, de acordo com o exemplo a seguir.

19.4.1.1.- Orientações Importantes para o Educador

- Nunca permita que a criança anote nenhum valor numérico nas quadrículas da “máquina de calcular”, *a máquina só deve ser utilizada para **contagem** das quadrículas* a partir do posicionamento correto dos delimitadores.
- Treine muito bem o processo de contagem das quadrículas até que a criança saiba realizar as contagens sem nenhuma dificuldade para quaisquer dos valores possíveis de serem obtidos na máquina de calcular.
- Exercite o cálculo das multiplicações utilizando muitas vezes a propriedade comutativa da multiplicação, como por exemplo, em: “– Veja que 4x5 é igual a 5x4!”.





- Não se preocupe em fazê-las memorizar (“decorar”) os valores dos resultados ainda nesta fase do processo aprendizagem. Deixe que as crianças estruturem o seu conhecimento sobre a contagem das quadrículas. Este processo é interno a cada indivíduo e é de difícil observação ou avaliação.

19.5.- Recortar e montar o Material

Esta é uma atividade (construtivista) que exige a habilidade no uso de uma tesoura escolar. As crianças devem recortar cuidadosamente as fichas contidas na folha das tabuadas do 2, 3, 4 e 5. Elas devem, ainda, recortar e montar (colando as abas com cola pastosa) as Caixas de Avaliação, colando, em seguida, as etiquetas de forma conveniente. O professor deve orientá-las chamando a atenção para a maneira de recortar as caixas, para que elas não recortem errado e, nem cortem sem querer, as abas de colagem. O professor deve ter disponíveis em excesso este material para substituir aqueles que forem recortadas de forma errada pelas crianças. Seria muito constrangedor para a criança não poder concluir o seu trabalho de forma correta.

19.6.- O Jogo da Tabuada

Este é um jogo deve envolver o educador e apenas uma criança.

- Separe e utilize apenas as onze fichas da tabuada do 2 nesta atividade. Espalhe-as com as “continhas” (as multiplicações indicadas) *voltadas para baixo* sobre o tampo plano de uma mesa ou carteira escolar. Embaralhe-as bem.
- A criança deve ter à sua frente duas das Caixas de Auto-avaliação de Perícia – uma com o rótulo “Acertei!” e a outra com o rótulo “Não sei ainda!” e também a nossa “máquina de calcular de papel” e as duas faixas de delimitação.

O professor deve orientar e acompanhar as seguintes atividades do estudante:

- *O estudante deve escolher uma das fichas que está com a face virada para baixo e falar em voz alta o resultado da tabuada.*
- *Ele deve em seguida conferir o resultado da sua resposta na "máquina de calcular" e colocar a ficha em uma das caixas de acordo com os seus rótulos: "Acertei!" ou "Não sei ainda!".*
- *Deve repetir este processo até que todas as fichas tenham sido utilizadas.*
- *Depois que as crianças daquela sala de aula dominem o jogo elas podem passar a jogar em duplas, anotando as tabuadas não sabidas pelo seu parceiro, para que depois isto possa ser avaliado pelo professor.*
- *As Caixas de Auto-avaliação se destinam a dois tipos de observação por parte do educador ou avaliador:*

> *(1ª) Avaliação quantitativa, geralmente procedida pelo estudante através da contagem da quantidade de acertos e erros cometidos a cada rodada com um dado conjunto de fichas;*
>
> *(2ª) Análise qualitativa, (ou avaliação qualitativa) a ser procedida pelo educador sem que o educando necessariamente tome conhecimento do resultado. Este segundo tipo de observação visa avaliar a aquisição de perícia pelo estudante no cálculo das multiplicações apresentadas sob a forma de tabuada.*

19.6.1.- Observações importantes:

Treine bem a tabuada do dois até que esteja bem sabida. Quando isto ocorrer, introduza a tabuada do 3, depois a do 4 até a tabuada do 5, de acordo com o que é exposto a seguir:

- *Não tenha pressa em passar da tabuada do dois para a tabuada do três. Cada um desses passos pode levar várias horas-aula ou até vários dias, dependendo do modelo do estudante, em especial quando se tratar de crianças com necessidades especiais.*
- *Quando for conveniente passe para a tabuada do 3 e somente use as fichas desta tabuada, não as misture com as da tabuada anterior.*
- *Verifique se a criança aprendeu bem a tabuada do 3.*
- *Volte para a tabuada do 2 e jogue de novo.*
- *Confirmado que a criança ainda se lembra bem da tabuada do 2, misture agora as fichas das duas tabuadas a do 2 e a do 3 e repita o jogo.*

- *Faça isto continuamente até atingir a tabuada do cinco. Caso ache que a quantidade de fichas é muito grande, quando se juntam as fichas das tabuadas do dois até o cinco, retire do jogo as multiplicações julgadas mais fáceis pela criança.*
- *Caso a criança ache que para ela é mais fácil utilizar o método dos "pauzinhos" (JARIT#11) do que a "máquina calculadora" para obter os resultados das tabuadas, permita que ela passe a utilizar alternativamente um dos processos, até que ela descubra qual é o melhor deles para a sua forma de pensar.*

19.6.1.1.- A Divisão Como Operação Inversa da Multiplicação

Um passo muito importante depois que a criança dominou a tabuada de um dos números, como por exemplo, a tabuada do 2, é a realização da operação inversas, ou seja: *dado um produto (resultado de uma multiplicação), a criança deve encontrar qual (ou quais) a (ou as) multiplicação (ou multiplicações) o originou*. Este jogo pode agora ser realizado com as fichas todas voltadas para cima (mostrando as multiplicações indicadas) e a criança irá apontando e retirando as tabuadas que acertar. Como por exemplo, para as crianças que já dominam as tabuadas do 2 até a do 4: "Quais as multiplicações cujo resultado é 12?". Veja que as soluções são: "3×4", "2×6" e ainda "4×3" e "6×2", justamente devido à propriedade comutativa da multiplicação. Se julgar necessário ou conveniente, peça à criança que concretize estes resultados, utilizando a nossa calculadora de papel ou o procedimento mostrado no item 4.3 (multiplicação) ou 4.4. (divisão) anteriores..

Este jogo é muito importante pois introduz conceitos que mais tarde serão utilizado na divisão. A divisão é a operação inversa da multiplicação.

19.6.1.2.- Observações Importantes

- ***A cada tabuada sabida repita esta etapa – a da busca da operação inversa - para as tabuadas anteriores, primeiramente em separado, mas depois vá juntando e embaralhando as fichas das demais tabuadas.***
- ***Não tenha pressa em passar da tabuada do dois para a tabuada do três, nem da do três para a do quatro e para a do cinco. Vá devagar.***
- ***Se julgar que a quantidade de fichas é muito grande retire as fichas que contém tabuadas já muito familiares à criança.***
- ***Os reconhecimentos pelo educador de quais fichas têm resultados familiares para cada uma das crianças é obtido através da observação continuada das fichas que vão parar nas caixas de avaliação. O educador, em caso de trabalhar com turmas muito grandes poderá gerenciar estes dados através de anotações específicas relativas ao***

desempenho de cada um de seus alunos, anotações estas que podem ser feitas pelos próprios estudantes.

19.3.- Avançando em Busca da Perícia

As crianças se tornarão “peritas em tabuada”, não à medida que conhecerem os resultados de todas as multiplicações indicadas do 2, 3, 4 e 5, mas a partir de que dominem as formas de processar estas informações utilizando a “máquina de calcular” ou utilizando os “pauzinhos” cruzados (Vide JARIT#11). O educador pode verificar isto utilizando as Caixas de Avaliação de Perícia onde estão as etiquetas: “ACERTOU!” e “Não sabe ainda!”.

- ***Depois de dominadas as tabuadas do dois até a do cinco, o processo poderá se repetir com as demais tabuadas, do seis até o 9.***
- ***Não se preocupe em “ensinar” as tabuadas do 0, do 1 e do 10, elas podem ser obtidas das demais.***
- ***A propriedade comutativa da multiplicação deve ser destacada e usada com relação às tabuadas já sabidas, como, por exemplo:* 2×6 *e* 6×2; 3×7 *e* 7×2*, e assim por diante.***

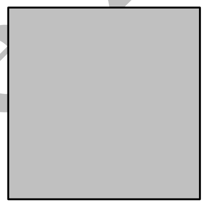
JARIT#20 – JOGOS PARA O PENSAMENTO ARITMÉTICO Nº 20

Jogos de com os Cartões Multiplicação-Produto-Cor

Este é um jogo que visa a fixação das tabuadas do 1 até a tabuada do 10, podendo este processo ser estendido às tabuadas do 11 e 12. Pensado para ser um jogo da Memória, nada impede de o adotarmos como um jogo de casamento de padrões, onde cartões contendo as multiplicações podem ser associados aos cartões contendo os seus respectivos produtos, e de acordo com a cor de fundo destes cartões.

20.1.- O Jogo da Memória das Tabuadas do 1 até 12

Este jogo possui 10 conjuntos de 22 cartões quadrados. Cada um destes cartões mede aproximadamente 2,6cm × 2,6cm.



Cada um destes 12 conjuntos corresponderá às tabuadas de multiplicar do 'um' até à tabuada de multiplicar do 'dez'. Dos 22 cartões que compõem cada uma das tabuadas e suas respectivas soluções, 11 contém uma multiplicação indicada e os demais 11 contém os produtos, isto é, os resultados destas multiplicações. A seguir é mostrado um conjunto de cartões da tabuada de multiplicar do 'cinco' em tamanho reduzido (70% do seu tamanho natural).

5×0=	5×1=	5×2=	5×3=	5×4=	5×5=
5×6=	5×7=	5×8=	5×9=	5×10=	
0	5	10	15	20	25
30	35	40	45	50	

O leitor encontrará todos os 12 conjuntos de 22 cartões cada, na pasta JARIT#19 no CD-R que acompanha este livro.

20.1.1.- Os 10 conjuntos de Cartões Multiplicação-Produto-Cor

Para facilitar o nosso trabalho pedagógico resolvemos denominar estes conjunto de cartões como: Cartões Multiplicação-Produto-Cor, sendo que cada par de cartões destes 12 conjuntos que podem ser casados: multiplicalção + produto + cor serão denominados Os cartões com cada uma da 'tabuadas de multiplicar' , de uma tabuada para outra, terá cores distintas:

1x0=	1x1=	1x2=	1x3=	1x4=	1x5=
1x6=	1x7=	1x8=	1x9=	1x10=	
0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	

2x0=	2x1=	2x2=	2x3=	2x4=	2x5=
2x6=	2x7=	2x8=	2x9=	2x10=	
0	2	4	6	8	10
12	14	16	18	20	

3x0=	3x1=	3x2=	3x3=	3x4=	3x5=
3x6=	3x7=	3x8=	3x9=	3x10=	
0	3	6	9	12	15
18	21	24	27	30	

4x0=	4x1=	4x2=	4x3=	4x4=	4x5=
4x6=	4x7=	4x8=	4x9=	4x10=	
0	4	8	12	16	20
24	28	32	36	40	

5x0=	5x1=	5x2=	5x3=	5x4=	5x5=
5x6=	5x7=	5x8=	5x9=	5x10=	
0	5	10	15	20	25
30	35	40	45	50	

6x0=	6x1=	6x2=	6x3=	6x4=	6x5=
6x6=	6x7=	6x8=	6x9=	6x10=	
0	6	12	18	24	30
36	42	48	54	60	

7x0=	7x1=	7x2=	7x3=	7x4=	7x5=
7x6=	7x7=	7x8=	7x9=	7x10=	
0	7	14	21	28	35
42	49	56	63	70	

8x0=	8x1=	8x2=	8x3=	8x4=	8x5=
8x6=	8x7=	8x8=	8x9=	8x10=	
0	8	16	24	32	40
48	56	64	72	80	

9x0=	9x1=	9x2=	9x3=	9x4=	9x5=
9x6=	9x7=	9x8=	9x9=	9x10=	
0	9	18	27	36	45
54	63	72	81	90	

10x0=	10x1=	10x2=	10x3=	10x4=	10x5=
10x6=	10x7=	10x8=	10x9=	10x10 =	
0	10	20	30	40	50
60	70	80	90	100	

Os cartões das tabuadas do 11 e do 12 terão os numerais desenhados em branco sobre um fundo escuro:

11x0=	11x1=	11x2=	11x3=	11x4=	11x5=
11x6=	11x7=	11x8=	11x9=	11x10 =	
0	11	22	33	44	55
66	77	88	99	110	

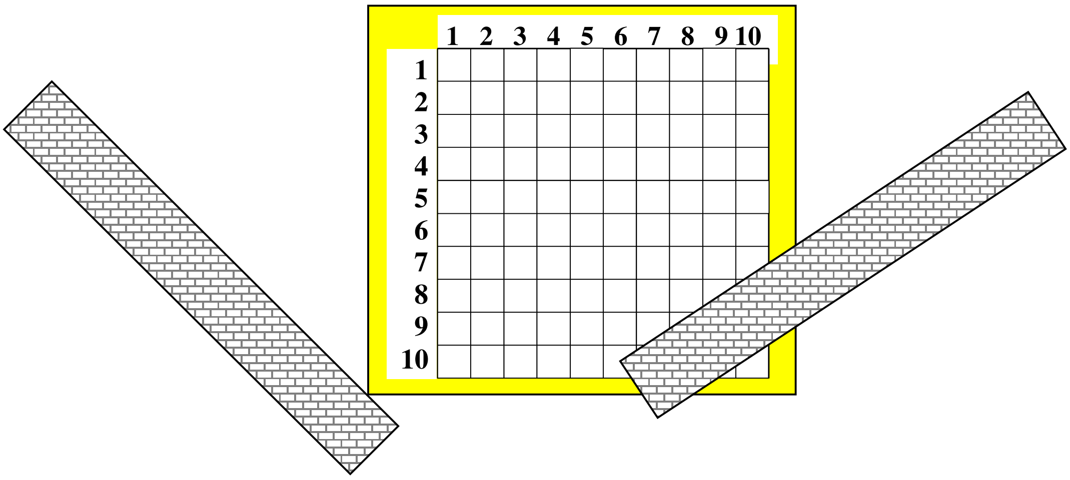
12x0=	12x1=	12x2=	12x3=	12x4=	12x5=
12x6=	12x7=	12x8=	12x9=	12x10 =	
0	12	24	36	48	60
72	84	96	108	120	

O verso de todos estes cartões deve apresentar-se com um mesmo e único padrão neutro, como ocorre nas cartas do baralho comum, ou devem ser deixadas em branco. As folhas com os padrões destinados aos versos dos cartões podem ser encontradas também no CD-R que acompanha este livro.

Na pasta correspondente a este jogo, o leitor encontrará as tabuadas de multiplicar desde a tabuada do 0 até a tabuada do 10, e os seus respectivos resultados para que possa imprimi-las e utilizá-las de acordo com a sua escolha.

20.1.2.- Observação Importantíssima

O educador perceberá que a associação dos Cartões Multiplicações-Produto-Cor com o uso moderado da *Máquina de Calcular de Papel com os dois Delimitadores* (vide figura a seguir), que pode ser encontrada no JARIT#18, tornará os jogos apresentados a seguir mais interessantes.



20.2.- O Jogo do Casamento de Padrões

O Jogo de Casamento de Padrões levará em conta o seguinte: cada cartão contendo uma multiplicação deve ser casado com o seu respectivo produto.

20.2.1.- Algumas Idéias Sobre as Formas de Jogar

- O educador poderá utilizar um-a-um cada um dos conjuntos de tabuadas: desde a tabuada do 1 até a tabuada do 10. As tabuadas do 11 e 12 poderão também ser utilizadas, mas recomenda-se que isto seja feito numa fase mais avançada.
- O educador poderá misturar os cartões de 2 tabuadas, alternando-as: tabuada do 1 e 2; tabuada do 2 e do 3; tabuada do 2 e do 4; tabuada do 3 e do 4; tabuada do 2 e do 5; etc, de acordo com a sua perspicácia.
- O educador deve notar que as tabuadas em que vale a propriedade comutativa, tais como 2×3 e 3×2, só para citar um exemplo deverão ter os casamentos de padrão segundo as cores daquela tabuada. Veja o certo e o erra do seguir:

- **Certo:**

$2\times3=$	6

$3\times2=$	6

- **Errado:**

$2\times3=$	6

$3\times2=$	6

- Quando a quantidade de cartões for igual a, ou maior que, 44, pode haver a participação de dois ou mais indivíduos no jogo, a critério do educador.
- Escolher alguns pares de cartões (a multiplicações e seu respectivo produto) para que os casamentos de padrão sejam feitos. Normalmente, a preferência da escolha destes pares deve recair sobre as tabuadas 'mais difíceis': 6×7, 7×7, 8×8, 8×9, 9×9, e muitas outras de acordo com a percepção do educador sobre as dificuldades demonstradas pelos estudantes.
- Uma experiência bastante notável é fazer com que, dadas duas ou mais tabuadas quaisquer, os estudantes escolham aquelas em que vale a propriedade comutativa. Isto pode ser estendido paulatinamente até abranger todos conjunto das 10 tabuadas.

20.3.- Regras do Jogo da Memória

Estes são JOGOS DA MEMÓRIA em que o par de cartões deve ser escolhido segundo a correspondência entre a multiplicação e o seu produto levando-se em conta ainda o necessário casamento das cores entre estes dois cartões.

20.3.1.- Jogo da Memória Para Um Jogador por vez

Este é um jogo individual, em que dois ou mais jogadores podem disputá-lo, por exemplo, contra o relógio, isto é, deve-se marcar o tempo que cada jogador gasta para terminar a partida. É evidente que ganha o jogo aquele que o realizou no menor espaço de tempo. Para evitar confusão recomenda-se que além dos jogadores se escolha uma outra pessoa para servir de cronometrista das partidas.

4. Escolher um grupo de Cartões Multiplicação-Produto-Cor – o que irá perfazer 22 cartões;
5. Separar e formar dois grupos de cartões: um contendo todas as multiplicações e o outro contendo todos os produtos;
6. Manter estes cartões em dois grupos bem separados e voltando as suas faces para baixo sobre o tampo de uma mesa;
7. Ainda sobre o tampo da mesa, embaralhar os cartões, mantendo-s sempre em dois grupos separados (somente multiplicações e somente produtos).
8. Organizar estes dois grupos de cartões em linhas e colunas, mais ou menos regulares;
9. O jogo começa ao se virar dois destes cartões, um de cada grupo.
10. Verificar se o produto do primeiro cartão corresponde ao resultado obtido no segundo cartão.
11. Se os cartões forem correspondentes, retirar o par de cartões, caso contrário voltá-los com a face para baixo e realizar nova tentativa.
12. O jogo acaba quando todos os pares de cartões correspondentes forem retirados do jogo.

20.3.2.- Jogo da Memória Para Dois ou mais Jogadores

Este é um jogo em que podem participar e 2 até o máximo de 4 jogadores.

1. Escolher dois grupo de Cartões Multiplicação-Produto-Cor – o que irá perfazer 44 cartões;
2. Separar e formar dois grupos de cartões: um contendo todas as multiplicações e o outro contendo todos os produtos;
3. Manter estes cartões em dois grupos bem separados e voltando as suas faces para baixo sobre o tampo de uma mesa;
4. Ainda sobre o tampo da mesa, embaralhar os cartões, mantendo-s sempre em dois grupos separados (somente multiplicações e somente produtos).
5. Organizar estes dois grupos de cartões em linhas e colunas, mais ou menos regulares;
6. O jogo começa ao se virar dois destes cartões, um de cada grupo.

7. Verificar se o produto do primeiro cartão corresponde ao produto e à cor obtidos no segundo cartão (***é importante que as cores tanto como multiplicação e produto casem perfeitamente***).
8. Se os cartões forem correspondentes, retirar o par de cartões, caso contrário voltá-los com a face para baixo e realizar nova tentativa, passando a vez para o próximo jogador
9. O jogo acaba quando todos os pares de cartões correspondentes forem retirados do jogo.
10. Ganhará o Jogador que retirou para si a maior quantidade de cartões durante o jogo.

20.3.- Outras Idéias

O jogo pode ser tornado mais interessante se:

1. Se for jogado por dois participantes – com 22 ou 44 cartões – , sendo que um joga e o outro observa e anota a quantidade de jogadas necessárias para que o primeiro deles consiga retirar todos os pares. Em seguida eles mudam de posição, jogador passa a ser o observador e vice-versa.
2. Se for jogado por dois participantes de forma alternada. O primeiro jogador faz a sua tentativa. Se conseguir formar o par de cartões, retira os cartões e conta esta retirada como sendo um ponto para si. ***O seguinte deve ser combinado antes do início da partida:*** acertando ou não, o jogador deve ceder a sua vez ao outro jogador ou então, em caso de acerto o jogador tem direito a jogar mais uma vez, para somente então ceder a vez ao outro jogador.
3. Pode-se jogar ainda com duas tabuadas distintas, embaralhando-se todos os 44 cartões sobre o tampo da mesa sem separação entre as multiplicações e os produtos.
4. Pode-se ainda jogar com pares de multiplicações/produtos selecionados previamente (normalmente deve-se escolher as multiplicações mais difíceis de serem decoradas), como por exemplo: 6X7/42; 7X8/56; 8X9/72; 9X9/81, etc. A quantidade de pares pré-selecionados não deve ser muito grande, devendo estar entre 6 pares e no máximo 11 pares, mas isto fica a critério do educador.